UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
ÁREA DE FÍSICA

LABORATORIO FÍSICA II

(005-2821)

Prof. Ricardo **Nitsche** C.

Ciudad Bolívar - Venezuela - Noviembre 2023

INDICE

PRESENTACIÓN

El presente material se ha elaborado para los alumnos del curso de Laboratorio de Física II de la Escuela de Ciencias de la Tierra e Ingeniería de la Universidad de Oriente - Núcleo Bolívar - Venezuela. La idea es reforzar algunos conocimientos de los cursos teóricos de las asignaturas de física, pero sobre todo que responda a la necesidad de que el participante (*alumno del curso*) aprenda a concluir en base a los resultados de un estudio y de los datos obtenidos en los trabajos de campo.

Este material también parte de la necesidad de reemplazar el trabajo en un laboratorio de física propiamente, en virtud de la política del gobierno nacional ante las universidades públicas (*y la educación en general*) y a impedir la formación de profesionales, lo que ha dando lugar a una depredación por parte del hampa de los espacios y la destrucción casi total y sistemática de instalaciones y equipos universitarios. Todo ello implica que las actividades serán realizadas en casa o en campo, pero no dentro de las instalaciones de la universidad, y los participantes deberán aprender a seguir las instrucciones para que, por su propia cuenta, puedan realizar las actividades que se indican en este material. Aparte de las consultas presenciales (*no virtuales*) para aclarar e ir revisando los avances individuales y/o grupales.

El material se divide en dos partes, la primera es meramente teórica y se enfoca a ampliar los conocimientos estadísticos adquiridos previamente, en este caso determinar relaciones de regresión en pares ordenados (*no necesariamente lineales, y aquí lo nuevo respecto al laboratorio anterior*). La segunda parte son las actividades en campo y en la casa, aunque se pueden hacer de forma individual, se recomienda trabajar en equipo (*dos a tres*), cada actividad contiene una parte teórica preliminar, un procedimiento a realizar y por supuesto el saber concluir de los resultados obtenidos. Pese a que el contenido programático original hace énfasis en el temario de Física II, por motivos de no tener a la disposición los equipos apropiados nos enfocaremos más en temas del programa de Física I y Física III respectivamente.

Todo el trabajo (*aunque sea en equipo las mediciones y otras actividades*) se entregara en forma individual a mano (*lápiz*). La entrega será en un pequeño cuaderno (*que llamaremos cuaderno de laboratorio*), en el cual se encontraran: todos los resultados de los cálculos de los problemas (*tabulados en sus respectivos cuadros*) y las actividades de la segunda parte antes señalada, y lo más importante las conclusiones, además de los datos personales del participante. Instrucciones y dudas en la primera sección de clases. **Recomendación lea todo el material primero antes de ponerse a hacer algo**.

1.- ESTADÍSTICA

1.1.- Regresiones no lineales

En el **Laboratorio de Física I** trabajamos con la regresión lineal entre dos cantidades; en este caso sean "***xi***" la variable independiente y "***yi***" la dependiente tenemos en una relación lineal de la forma:

$$\hat{yi} = f(xi) = a0 + a1 \cdot xi \quad (1.1)$$

Donde:

$$a1 = \frac{n \cdot \sum xi \cdot yi - \sum xi \cdot \sum yi}{n \cdot \sum (xi)^2 - (\sum xi)^2} \quad (1.2)$$

$$a0 = \frac{\sum xi^2 \cdot \sum yi - \sum xi \cdot \sum xi \cdot yi}{n \cdot \sum (xi)^2 - (\sum xi)^2} \quad (1.3)$$

También es útil y valida la relación:

$$\bar{y} = a0 + a1 \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \frac{\sum yi}{n} = a0 + a1 \cdot \frac{\sum xi}{n} \quad (1.4)$$

De igual forma definimos al **coeficiente de correlación muestral de Pearson**, que es un valor entre "-1" (*correlación negativa*) a "1" (*correlación positiva*), pasando por "0" (*correlación nula o ninguna*), y el resultado se suele expresar en porcentaje, este valor muestra el ajuste (*cuán buena es las relación entre las variables dependiente e independiente*) y está definido como:

$$r = \frac{n \cdot \sum xi \cdot yi - \sum xi \cdot \Sigma yi}{\sqrt{n \cdot \sum (xi)^2 - (\Sigma xi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum (yi)^2 - (\Sigma yi)^2}}$$

o $\quad (1.5)$

$$r = \frac{\sum (xi - \bar{x}) \cdot (yi - \bar{y})}{\sqrt{\sum (xi - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (yi - \bar{y})^2}}$$

Antes (*Laboratorio* Física I) omitimos el origen de las expresiones de los coeficientes "***a0***" y "***a1***", y sólo señalamos que la suma de las diferencias entre la función encontrada ($\hat{yi} = f(xi)$) y los pares de datos (*xi*,*yi*) debe ser mínima : $\sum\left[yi - \hat{yi}\right] = \sum[yi - f(xi)] = \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)]$. En este punto vamos a explicar un poco de ese origen y como aplicarlo en otros tipos de relaciones de regresión.

En primer lugar explicaremos una propiedad de la **media aritmética** y las diferencias respecto a la media. Definida la media aritmética de una serie de "*n*" números como:

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} \Leftrightarrow n \cdot \bar{x} = \sum xi$$

La suma de la diferencia de los datos respecto a la media (*suma de las desviaciones*) debe cumplir, aplicando propiedades de linealidad del operador suma y de la suma de una constante (*en este caso el valor de la media*), que:

$$\sum(xi - \bar{x}) = (\sum xi) - (\sum \bar{x}) = (\sum xi) - (n \cdot \bar{x}) = 0$$

Por ello si se quiere hallar el promedio aritmético de diferencia de los datos respecto a la media el resultado sería obviamente nulo, a menos que usemos valores absolutos en la suma ($\sum|xi - \bar{x}|$).

Para solventar el problema de signos lo más usual es elevar los valores de estas diferencias al cuadrado, el promedio aritmético de las diferencias de los datos al cuadrado define a la **varianza** (s^2), o lo que resulta: $n \cdot s^2 = \sum(xi - \bar{x})^2$.

$$n \cdot s^2 = \sum(xi - \bar{x})^2 = \sum(xi^2 - 2 \cdot xi \cdot \bar{x} + \bar{x}^2) = \sum xi^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \sum xi + n \cdot \bar{x}^2$$

$$usando\ :\ n \cdot \bar{x} = \sum xi \quad \Rightarrow n \cdot (\bar{x})^2 = (\sum xi)^2/n$$

$$n \cdot s^2 = \sum xi^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot (n \cdot \bar{x}) + n \cdot \bar{x}^2 = \sum xi^2 - n \cdot \bar{x}^2 = \sum xi^2 - (\sum xi)^2/n \Rightarrow \mathbf{s}^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \left[\frac{\sum xi}{n}\right]^2$$

Volvamos ahora a la diferencia entre los valores dependientes (***yi***) y los encontrados en la función ($\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$) que los relaciona con los dependientes (***xi***), dado que al igual que con la media aritmética, con la mejor recta de ajuste se tiene que las diferencias positivas se deben compensar con las negativas, esto es:

$$\sum\left[yi - \hat{yi}\right] = \sum[yi - f(xi)] = \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)] = 0$$

Definiremos la cantidad: $\varepsilon i = yi - \widehat{yi}$; y como esta cantidad puede ser positiva o negativa, la elevaremos al cuadrado a fin de eliminar el problema anterior y crearemos una nueva función llamada "***D***" que es la suma de los εi^2.

$$\mathbf{D} = \sum \varepsilon i^2 = \sum\left[yi - \widehat{yi}\right]^2 = \sum[yi - f(xi)]^2 = \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)]^2$$

En esta situación "***ao***" y "***a1***" son las variables de la función "***D***" y si deseamos encontrarlas debemos tener en cuenta que la función definida antes sea mínima, y el calculo del mínimo se encuentra igualando la primera derivada de la función a cero, en este caso como tenemos dos variables hay que usar derivadas parciales, esto es:

$$\frac{\partial D}{\partial ao} = \frac{\partial \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)]^2}{\partial a0} = 2 \cdot \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)] \cdot (-1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \boldsymbol{a0 \cdot n + a1 \cdot \sum xi = \sum yi}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a1} = \frac{\partial \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)]^2}{\partial a1} = 2 \cdot \sum[yi - (a0 + a1 \cdot xi)] \cdot (-xi) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \boldsymbol{a0 \cdot \sum xi + a1 \cdot \sum xi^2 = \sum xi \cdot yi}$$

El resultado es que tenemos dos ecuaciones cuya resolución son justamente las expresiones de los coeficientes " $a0$" y "$a1$" que hemos señalado al inicio.

En resumen: si tenemos una serie de pares de datos (xi,yi) relacionados y la relación entre ambos obedece a una línea recta $\hat{y} = f(x) = a0 + a1 \cdot x$, debe ocurrir que los valores de los coeficientes a obtener son el resultado de resolver el sistema de ecuaciones:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum xi = \sum yi \qquad (1)$$
$$a0 \cdot \sum xi + a1 \cdot \sum xi^2 = \sum xi \cdot yi \qquad (2)$$

La idea anterior es extensible a otras relaciones, por ejemplo la solución puede ser una **ecuación cuadrática** de la forma: $\hat{y} = f(x) = a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2$, en aqui la idea sería resolver un sistema de tres ecuaciones para hallar los coeficientes: $a0$, $a1$ y $a2$:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum xi + a2 \cdot \sum xi^2 = \sum yi \qquad (1)$$
$$a0 \cdot \sum xi + a1 \cdot \sum xi^2 + a2 \cdot \sum xi^3 = \sum xi \cdot yi \qquad (2)$$
$$a0 \cdot \sum xi^2 + a1 \cdot \sum xi^3 + a2 \cdot \sum xi^4 = \sum xi^2 \cdot yi \qquad (3)$$

O incluso a una **regresión multivariable**; por ejemplo: $\hat{z} = f(x,y) = a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot y$, que es conocido como **plano de regresión** y en esta situación tendríamos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum xi + a2 \cdot \sum yi = \sum zi \qquad (1)$$

$$a0 \cdot \sum xi + a1 \cdot \sum xi^2 + a2 \cdot \sum xi \cdot yi = \sum xi \cdot zi \qquad (2)$$

$$a0 \cdot \sum yi + a1 \cdot \sum xi \cdot yi + a2 \cdot \sum yi^2 = \sum yi \cdot zi \qquad (3)$$

Otro modo es **transformar una expresión no lineal a la forma lineal**, siendo estos los casos más comunes y la transformación se hace como se indica en la tabla a continuación:

Curva	Expresión original	Transformación	Forma lineal
Hiperbólica (1)	$\frac{1}{y} = a0 + a1 \cdot x$ (y≠0)	$w = \frac{1}{y}$	$w = a0 + a1 \cdot x$
Hiperbólica (2)	$y = a0 + \frac{a1}{x}$ (x≠0)	$z = \frac{1}{x}$	$y = a0 + a1 \cdot z$
Exponencial	$y = b \cdot a^x$ (a>0, a≠1)	$\ln y = \ln b + x \cdot \ln a$	$w = a0 + a1 \cdot x$
Geométrica	$y = b \cdot x^a$ (x>0, x≠1)	$\ln y = \ln b + a \cdot \ln x$	$w = a0 + a1 \cdot z$
Logarítmica	$y = b + a \cdot \ln x$ (x>0)	$z = \ln x$	$y = a0 + a1 \cdot z$
Logistica	$y = \frac{b \cdot a^x}{1 + b \cdot a^x}$ (a>0, a≠1, 0<y<1)	$\ln\left[\frac{y}{1-y}\right] = \ln b + x \cdot \ln a$	$w = a0 + a1 \cdot x$

Nota: se pueden usar en las transformaciones los logaritmos decimales o logaritmos naturales, aquí por tratarse de problemas físicos es mejor usar el logaritmo natural.

Ejemplo 1.1.

El pendulo simple es un recurso muy práctico a la hora de determinar el valor de la aceleración de la gravedad en algún sitio. Simplemente se mide el periodo de oscilación (*para angulos del pendulo pequeños <10*°) y se tiene teoricamente que se debe cumplir la relación:

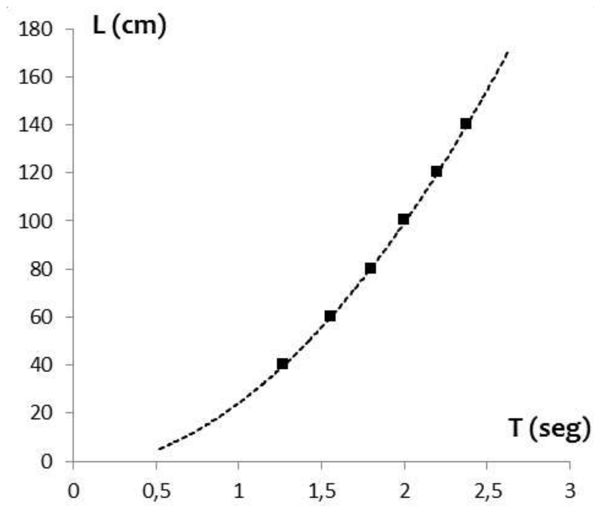
$$\omega = \frac{2\pi\, rad}{T} = \sqrt{\frac{a_g}{L}} \Leftrightarrow T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{a_g}\right] \cdot L \Leftrightarrow L = \left[\frac{a_g}{4\pi^2}\right] \cdot T^2$$

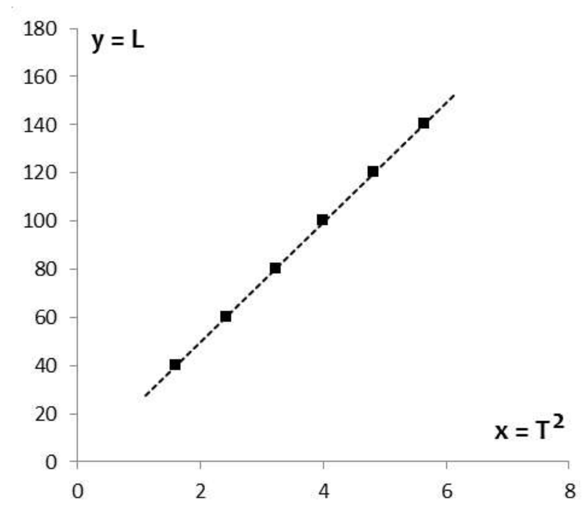
Si hacemos el siguiente cambio de variables: "$xi = Ti^2$" y "$yi = Li$" entonces resulta que:

$$L = \left[\frac{a_g}{4\pi^2}\right] \cdot T^2 \Rightarrow y = a0 + a1 \cdot x$$

Calculando por regresión lineal el coeficiente "a1" podemos determinar luego el valor de la aceleración de la gravedad al multiplicarlo por "$4\pi^2$". Sean los datos experimentales de un péndulo simple los indicados, tenemos:

i	1	2	3	4	5	6
Li (cm)	40	60	80	100	120	140
Ti (seg)	1,27	1,56	1,80	2,00	2,20	2,38





i	*Li (cm) = yi*	*Ti (seg)*	*xi = Ti²*	*xi·xi*	*xi·yi*	*yi·yi*
1	40	1,27	1,61	2,59	64,40	1.600
2	60	1,56	2,43	5,90	145,80	3.600
3	80	1,80	3,24	10,50	259,20	6.400
4	100	2,00	4,00	16,00	400,00	10.000
5	120	2,20	4,84	23,43	580,80	14.400
n = 6	140	2,38	5,66	32,04	792,40	19.600
Suma	**540**	**11,21**	**21,79**	**90,46**	**2243,60**	**55.600**

Donde usando las expresiones (1.2, 1.3 y 1.5) tenemos:

$$a1 = \frac{n \cdot \sum xi \cdot yi - \sum xi \cdot \sum yi}{n \cdot \sum (xi)^2 - (\sum xi)^2} = \frac{6 \cdot 2243,60 - 21,79 \cdot 540}{6 \cdot 90,46 - (21,79)^2} = 24,78$$

$$a0 = \frac{\sum xi^2 \cdot \sum yi - \sum xi \cdot \sum xi \cdot yi}{n \cdot \sum (xi)^2 - (\sum xi)^2} = \frac{90,46 \cdot 540 - 21,79 \cdot 2243,60}{6 \cdot 90,46 - (21,79)^2} = -0,034$$

$$r = \frac{n \cdot \sum xi \cdot yi - \sum xi \cdot \Sigma yi}{\sqrt{n \cdot \sum (xi)^2 - (\Sigma xi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum (yi)^2 - (\Sigma yi)^2}} = \frac{6 \cdot 2243,60 - 21,79 \cdot 540}{\sqrt{6 \cdot 90,46 - (21,79)^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 55600 - (540)^2}} = 0,99$$

En este ejemplo **podemos concluir** que: el valor de la aceleración de la gravedad resulta corresponder a lo que se supone que vale: $ag = 24,78 \cdot 4 \cdot \pi^2 = 978,3\, m/s^2$ (*en regiones ecuatoriales es un poco menor que el teorico de 980 m/s² ya que la fuerza centrifuga por la rotación de la Tierra lo reduce*); podemos observar que el valor de $a0 \simeq 0$, que se corresponde igualmente con lo esperado, y la correlación es prácticamente el 100% de ajuste, esto es que se equipara perfectamente a la relación teorica original.

Ejemplo 1.2.

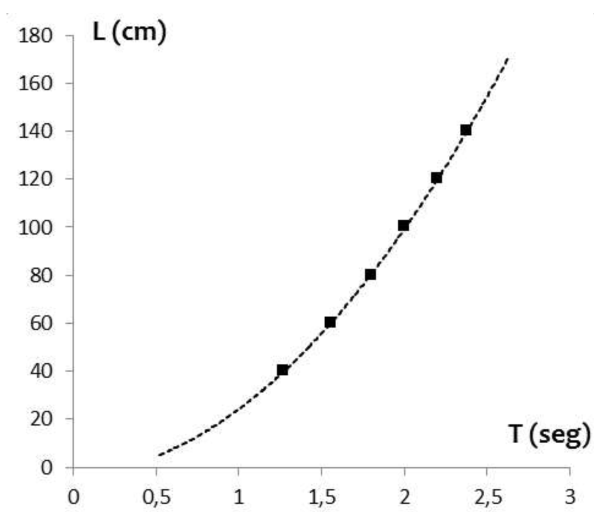
La **regresión geométrica** (también llamada regresión potencial ya que hace referencia a una cantidad elevada a una potencia) responde a una variable independiente elevada a un exponente. Ejemplo tenemos en el pendulo simple propiamente, pero en este caso *"xi = Ti"* y *"yi = Li"*, podemos ver que la relación del péndulo simple es la de una función geométrica:

$$L = [a_g/4\pi^2] \cdot T^2 \rightarrow y = b \cdot x^a$$

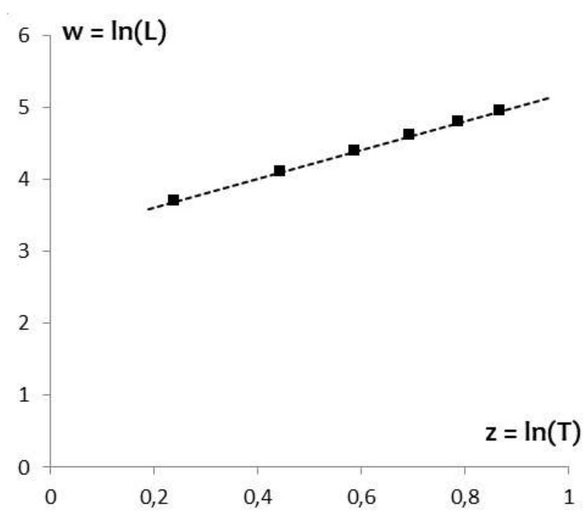
Bajo esta forma debe ocurrir que: $b = a_g/4\pi^2$ y $a = 2$. Para llevar la función geometrica a una función lineal aplicamos logaritmo a ambos lados. Se puede aplicar el logaritmo de base decimal, o el logaritmo neperiano o natural. Se recomienda el natural. Entonces el cambio de variables es:

$$\ln y = \ln b + a \cdot \ln x \leftrightarrow w = a0 + a1 \cdot z$$

Curva original



Curva transformada a recta



i	Li (cm) = yi	$xi = Ti$ (seg)	$zi = ln(Ti)$	$wi = ln(yi)$	$zi \cdot zi$	$zi \cdot wi$	$wi \cdot wi$
1	40	1,27	0,24	3,69	0,06	0,88	13,62
2	60	1,56	0,44	4,09	0,20	1,82	16,73
3	80	1,80	0,59	4,38	0,35	2,58	19,18
4	100	2,00	0,69	4,61	0,48	3,19	21,25
5	120	2,20	0,79	4,79	0,62	3,77	22,94
n = 6	140	2,38	0,87	4,94	0,75	4,28	24,40
Suma:	**540**	**11,21**	**3,62**	**26,5**	**2,45**	**16,53**	**118,12**

Para variar determinaremos los coeficientes "*a0*" y "*a1*" haciendo uso del sistema de ecuaciones:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum zi = \sum wi \qquad \rightarrow \qquad a0 \cdot 6 + a1 \cdot 3,62 = 26,5 \qquad (1)$$
$$a0 \cdot \sum zi + a1 \cdot \sum zi^2 = \sum zi \cdot wi \quad \rightarrow a0 \cdot 3,62 + a1 \cdot 2,45 = 16,53 \qquad (2)$$

Cuya respuestas son respectivamente: $a1 = 2,00$ y $a0 = 3,21$; lo cual cuadra con el exponente del tiempo y la aceleración de la gravedad resulta ser:

$$a0 = \ln b = \ln(ag/4\pi^2) = 3,21 \rightarrow ag = 4\pi^2 \cdot e^{3,21} = 978,2\, cm/s^2$$

El coeficiente de correlación da:

$$r = \frac{n \cdot \sum zi \cdot wi - \sum zi \cdot \Sigma wi}{\sqrt{n \cdot \sum (zi)^2 - (\Sigma zi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum (wi)^2 - (\Sigma wi)^2}} = \frac{6 \cdot 16,53 - 3,62 \cdot 26,5}{\sqrt{6 \cdot 2,45 - (3,62)^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 118,12 - (26,5)^2}} = 0,99$$

Podemos concluir que: el valor de la aceleración de la gravedad resulta corresponder a lo que se supone que vale: $ag = e^{3,21} \cdot 4 \cdot \pi^2 = 978,2\, m/s^2$, igual que en resultado anterior, y que el exponente al que se eleva el periodo es $a = 2$, lo que se corresponde con la ecuación que relaciona las dos variables. El valor de la correlación es prácticamente el 100% de ajuste, esto es que se equipara perfectamente a la relación teorica original.

Ejemplo 1.3.

La **regresión exponencial** es el segundo caso más común que suele aparecer en procesos físicos y naturales, tiene la forma: $y = b \cdot a^x$, estas situaciones son muy comunes en procesos de crecimientos como los de las bacterias (*mientras halla alimento suficiente*, caso contrario se tiene una regresión logística), o en los decaimientos radiactivos en los átomos. La forma lineal se obtiene calculando el logaritmo de la variable dependiente, esto es:

$$y = b \cdot a^x \Rightarrow \ln y = \ln b + x \cdot \ln a \Leftrightarrow w = a0 + a1 \cdot x$$

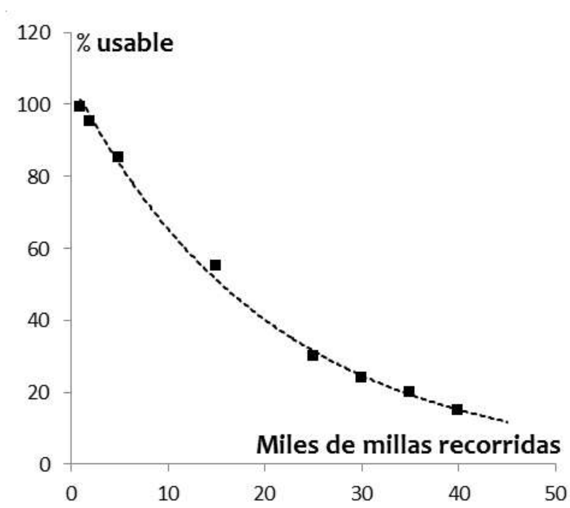
Si la variable "x" es el tiempo, a la constante "*a1*" se le conocerá como **constante de crecimiento** (si $a1>0$) o **constante de decaimiento** (si $a1<0$), el inverso de esta cantidad (en absoluto) ($\tau = 1/a1$) se conoce como **periodo de vida media**. El tiempo en que la cantidad dependiente se duplica (*en el caso del crecimiento y se le llama **periodo de duplicación***) o se divide a la mitad (*y se conoce como **periodo de semi-desintegración** en el caso del decrecimiento*) y este periodo vale:

$$T_{1/2} = \ln(2)/a1 = \ln(2) \cdot \tau.$$

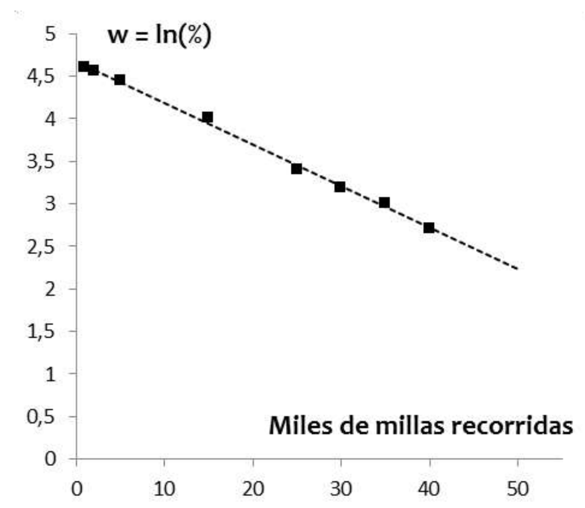
Consideremos las cifras siguientes son datos sobre el porcentaje de llantas radiales producidas por cierto fabricante que aún pueden usarse después de recorrer cierto número de millas:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
xi (en mil millas)	1	2	5	15	25	30	35	40
yi (en %)	99	95	85	55	30	24	20	15

Curva original



Curva transformada a recta



Sea: $y = b \cdot a^x \rightarrow \ln(y) = \ln(b) + \ln(a) \cdot x \rightarrow w = a0 + a1 \cdot x$; determinamos "*a0*" y "*a1*":

i	*xi* (en mil millas)	*yi* (en %)	*wi* = ln(*yi*)	*xi·xi*	*xi·wi*	*wi·wi*
1	1	99	4,60	1	4,6	21,16
2	2	95	4,55	4	9,11	20,7
3	5	85	4,44	25	22,21	19,71
4	15	55	4,01	225	60,11	16,08
5	25	30	3,40	625	85,03	11,56
6	30	24	3,18	900	95,34	10,11
7	35	20	3,00	1.225	104,85	9
n = 8	40	15	2,71	1.600	108,32	7,34
Suma	**153**	**423**	**29,88**	**4.605**	**489,57**	**115,66**

Determinaremos los coeficientes "$a0$" y "$a1$" haciendo uso del sistema de ecuaciones (o usando las expresiones 1.2 y 1.3):

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum xi = \sum wi \quad \rightarrow \quad a0 \cdot 8 + a1 \cdot 153 = 29,88 \quad (1)$$
$$a0 \cdot \sum xi + a1 \cdot \sum xi^2 = \sum xi \cdot wi \quad \rightarrow a0 \cdot 153 + a1 \cdot 4605 = 489,57 \quad (2)$$

Cuyas respuestas son respectivamente: $a0 = 4,67$ y $a1 = -0,05$ (*donde el resultado negativo indica que es una relación de decrecimiento*); la ecuación buscada es: $\ln(b) = 4,67 \rightarrow b = 107$ (*un valor muy cercano al 100% inicial*) y $\ln a = a1 = -0,05 \rightarrow a = e^{-0,05} = 0,95$, lo que da como resultado: $\hat{y} = 107 \cdot e^{-0,05 \cdot x} = 107 \cdot 0,95^x$; siendo la vida media de los cauchos de ese modelo en particular igual a: $\tau = 1/(0,05) = 20\, mil\, millas$; y su periodo de semi-desintegración (*cuando han fallado la mitad de ellos*) es de: $T_{1/2} = \ln(2) \cdot 20 = 14$ *mil millas*. Aparte tenemos que el coeficiente de correlación da:

$$r = \frac{n \cdot \sum xi \cdot wi - \sum xi \cdot \Sigma wi}{\sqrt{n \cdot \sum (xi)^2 - (\Sigma xi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum (wi)^2 - (\Sigma wi)^2}} = \frac{8 \cdot 489,57 - 153 \cdot 29,88}{\sqrt{8 \cdot 4605 - (153)^2} \cdot \sqrt{8 \cdot 115,66 - (29,88)^2}} = -0,99$$

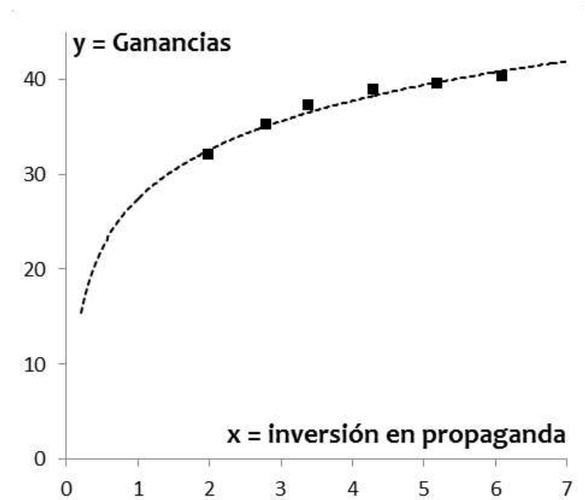
En este caso la correlación negativa indica que al aumentar la cantidad de millas debe reducirse el porcentaje de cauchos en funcionamiento y el valor cercano a 100% implica que el comportamiento responde bien a una forma exponencial.

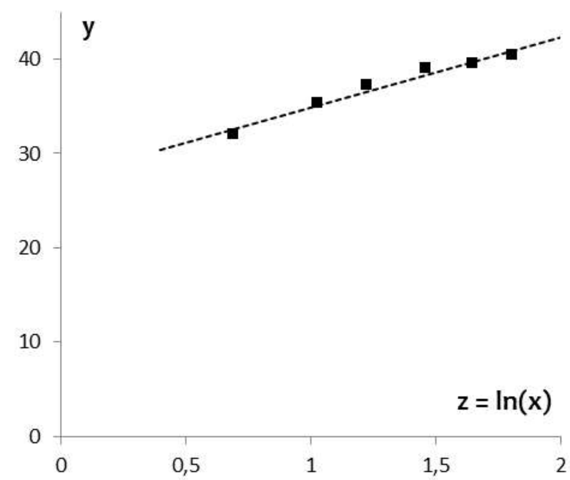
Ejemplo 1.4.

Las **regresiones logaritmicas** se da en situaciones similares a las exponenciales con exponente positivo, pero en vez de que el valor siga creciendo aún más conforme aumenta el independiente, aquí sigue siempre creciendo cada vez más lento, pero sin alcanzar un límite superior. Tomemos el siguiente ejemplo: los directivos de una empresa de cosmeticos desean ver la relación de los beneficios recibidos en función de los gastos en publicidad invertidos, los datos ambos en millones de euros son:

i	1	2	3	4	5	6
Inversión	2	2,8	3,4	4,3	5,2	6,1
Ganancias	32	35,2	37,2	38,9	39,5	40,3

Curva original | **Curva transformada a recta**





Sea: $y = a + b \cdot x \to y = a + b \cdot \ln(x) \to y = a0 + a1 \cdot z$; determinamos "*a0*" y "*a1*":

i	xi = inv	yi = gan	zi = ln(xi)	zizi	ziyi	yiyi
1	2,0	32,0	0,69	0,48	22,18	1.024
2	2,8	35,2	1,03	1,06	36,24	1.239,04
3	3,4	37,2	1,22	1,50	45,52	1.383,84
4	4,3	38,9	1,46	2,13	56,74	1.513,21
5	5,2	39,5	1,65	2,72	65,12	1.560,25
6	6,1	40,3	1,81	3,27	72,87	1.624,09
Suma	**23,8**	**223,1**	**7,86**	**11,15**	**298,68**	**8.344,43**

Determinaremos los coeficientes "*a0*" y "*a1*" haciendo uso del sistema de ecuaciones:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum zi = \sum yi \quad \to \quad a0 \cdot 6 + a1 \cdot 7,86 = 223,1 \quad (1)$$
$$a0 \cdot \sum zi + a1 \cdot \sum zi^2 = \sum zi \cdot yi \quad \to a0 \cdot 7,86 + a1 \cdot 11,15 = 298,68 \quad (2)$$

Donde resulta que los valores son: $a0 = 27,4$ y $a1 = 7,45$, siendo la relación final de la forma: $y = 27,4 + 7,45 \cdot \ln(x)$; aparte el coeficiente de correlación nos da un valor cercano al 100% por tanto la solución logaritmica encontrada es una muy buena aproximación a la relación entre ambas variables (gastos en publicidad y ganancias). El valor positivo de la correlación implica que a mayor mayores beneficios, pero al ser una relación logaritmica se requiere invertir mucho para logra aumentar las ganancias.

$$r = \frac{n \cdot \sum zi \cdot yi - \sum zi \cdot \Sigma yi}{\sqrt{n \cdot \sum (zi)^2 - (\Sigma zi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum (yi)^2 - (\Sigma yi)^2}} = \frac{6 \cdot 298,68 - 7,86 \cdot 223,1}{\sqrt{6 \cdot 11,15 - (7,86)^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 8344,43 - (223,1)^2}} = 0,98$$

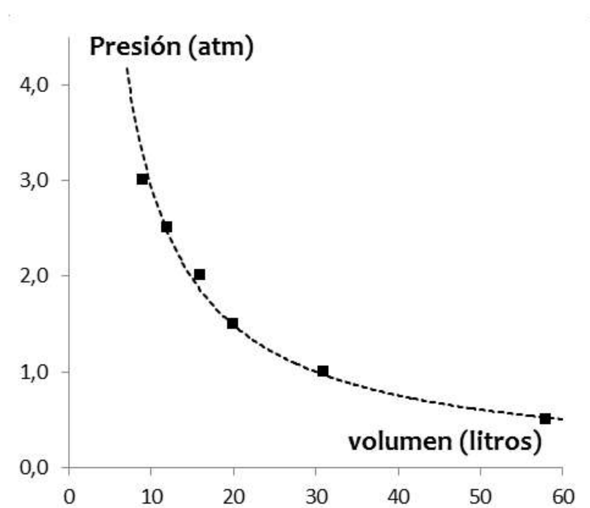
Nota: si hubieramos buscado una relación lineal entre las variables el resultado tendría la forma: $y = 29,6 + 1,92 \cdot x$; y la relación líneal nos da un correlación del 94%; un poco menor que la forma logaritmica, pero igual de alta y buena. En este caso para empezar a ver los frutos de los gastos en la publicidad al menos se necesita gastar más de 30 millones de dolares al inicio.

Ejemplo 1.5.

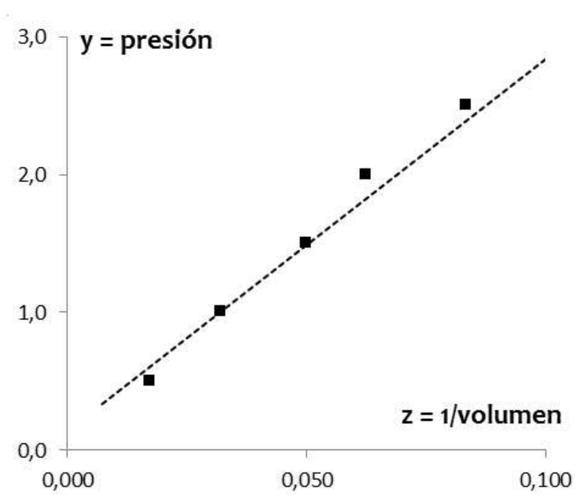
Las **regresiones hiperbolicas** se da en situaciones donde la cantidad dependiente su variación crece o decrece (según caso) pero los valores se dirigen a un valor límite, si la forma es: $y = a0 + a1/x$; ese valor límite es "$a0$"; pero si es de la forma: $1/y = a0 + a1 \cdot x \Leftrightarrow y = 1/(a0 + a1 \cdot x)$ en estos casos el valor límite a la que apunta la variable dependiente es cero. Tomemos el siguiente ejemplo: La Ley de Boyle Mariotte (ley de Boyle) es una de las leyes de los gases y fue formulada independientemente por irlandés Robert Boyle en 1662 y el Edme Mariotte en 1676; la misma establece que a temperatura constante entonces el volumen de un gas y la presión a la que esta sometido tiene una relación inversa ($p \cdot V = K \Leftrightarrow p = K/V$, siendo "K" una constante). Sean:

i	1	2	3	4	5	6
Volumen (litros)	58	31	20	16	12	9
Presión (atm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Curva original



Curva transformada a recta



Sea: $z = 1/volumen$; $y = presión \rightarrow y = a0 + a1 \cdot z$; determinamos "$a0$" y "$a1$":

i	xi = vol	yi = presión	zi = 1/xi	zizi	ziyi	yiyi
1	58,0	0,5	0,0172	0,0003	0,0086	0,25
2	31,0	1,0	0,0323	0,0010	0,0323	1,00
3	20,0	1,5	0,0500	0,0025	0,0750	2,25
4	16,0	2,0	0,0625	0,0039	0,1250	4,00
5	12,0	2,5	0,0833	0,0069	0,2083	6,25
6	9,0	3,0	0,1111	0,0123	0,3333	9,00
Suma	146	10,5	0,3564	0,0270	0,7825	22,75

Determinaremos los coeficientes "*a0*" y "*a1*" haciendo uso del sistema de ecuaciones:

$$a0 \cdot n + a1 \cdot \sum zi = \sum yi \qquad \rightarrow \qquad a0 \cdot 6 + a1 \cdot 0,3564 = 10,5 \quad (1)$$
$$a0 \cdot \sum zi + a1 \cdot \sum zi^2 = \sum zi \cdot yi \quad \rightarrow a0 \cdot 0,3564 + a1 \cdot 0,0270 = 0,7825 \quad (2)$$

Tenemos que los valores son: "*a0 = 0,14*" y "*a1 = 27,1*"; por otra parte el valor del coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{n \cdot \sum zi \cdot yi - \sum zi \cdot \Sigma yi}{\sqrt{n \cdot \sum(zi)^2 - (\Sigma zi)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum(yi)^2 - (\Sigma yi)^2}} = \frac{6 \cdot 0,7825 - 0,3564 \cdot 10,5}{\sqrt{6 \cdot 0,027 - (0,3564)^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 22,75 - (10,5)^2}} = 0,99$$

Cuyo resultado casi cercano a 100% indica que asumir una solución inversa entre las dos cantidades es algo correcto.

Nota: si se hubiera trabajado una solución geométrica de la forma: $y = b \cdot x^a$, el resultado era la solución: $y = 27,9 \cdot x^{-0,98}$, donde el exponente resultante se aproxima a: "*–1*" y el valor de la constante "*K*" es similar al resultado hiperbolico obtenido primero y esta solución tiene también una muy alta de correlación.

Ejercicios propuestos n°1

Se anexan abajo cinco series de datos (tablas 1.1, 1.2 1.3 1.4 y 1.5) determinar los coeficientes que describen cada una de los datos, y concluya de los resultados para cada tabla. (*Recuerde las conclusiones sólo pueden venir de los resultados encontrados, de ningún otro lado*). Realizar también una gráfica con los datos originales para ver su comportamiento.

1. En 2007 se publicó un estudio universitario en el que se investigaba el riesgo de colisión de la conducción bajo los efectos del alcohol. Se utilizaron datos de 2.871 accidentes para medir la asociación entre el nivel de alcoholemia (*BAC*) de una persona y el riesgo de sufrir un (%) accidente.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
BAC	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21
Riesgo (%)	1	1,03	1,06	1,38	2,09	3,54	6,41	12,6	22,1	39,05	65,32	99,78

Dato: asuma un comportamiento exponencial. ($y = b \cdot a^x = b \cdot e^{\ln a \cdot x} = b \cdot e^{a1 \cdot x} \rightarrow \ln y = \ln b + a1 \cdot x$ $\rightarrow z = a0 + a1 \cdot x$)

2. Gracias a los avances de la medicina y al aumento del nivel de vida, la esperanza de vida (***E***) ha aumentado en la mayoría de los países desarrollados desde principios del siglo XX. La tabla a continuación muestra el promedio de expectativa de vida, en años, de los estadounidenses entre 1900 y 2010.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Década	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
E (años)	47,3	50	54,1	59,7	62,9	68,2	69,7	70,8	73,7	75,4	76,8	78,7

Dato: asuma un comportamiento parabólico ($y = a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2$)

3. En un estudio se tabularon valores promedios para la edad, peso y talla de un individuo; los resultados se indican en la tabla inferior. Si el peso (*xi* en kg) es función de la estatura (*yi* en cm) encuentre una relación entre las cantidades.

i	1	2	3	4	5	6	7
Peso (x)	9	13	20	27	42	62	70
Talla (yi)	70	92	112	127	152	168	178

Dato: asuma que la solución es exponencial ($y = b \cdot a^x \rightarrow \ln y = \ln b + \ln a \cdot x \rightarrow z = a0 + a1 \cdot x$)

4. Del estudio anterior se tiene que la estatura (*yi* en cm) depende de la edad (xi en años); encuentre una relación entre las cantidades.

i	1	2	3	4	5	6	7
Edad (x)	9	13	20	27	42	62	70
Talla (yi)	70	92	112	127	152	168	178

Dato: asuma que la solución es potencial ($y = b \cdot x^a \rightarrow \ln y = \ln b + x \cdot \ln a \rightarrow w = a0 + a1 \cdot x$)

5. La presión (*p*) y el volumen (*V*) de un gas están ligados por una ecuación del tipo: $p = b \cdot V^a$, si a partir de sucesivas experiencias en laboratorio se han recogido los siguientes datos, determinar los valores de "a" y "b".

i	1	2	3	4	5	6
p (kg/cm^3)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
V (litros)	1,65	1,03	0,74	0,61	0,53	0,45

Dato: la solución es una función potencial ($y = b \cdot x^a \rightarrow \ln y = \ln b + x \cdot \ln a \rightarrow w = a0 + a1 \cdot x$)

2.- ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

A fin de instruir en como se realiza una investigación, y dado que los participantes pertenecen a la carrera de ingeniería industrial, han planteado una serie de actividades cuyo fin es fortalecer los conocimientos en vibraciones, ondas y fluidos. Las mismas se indican a continuación.

a. Periodo de vibración en un muelle elástico.
b. Periodo de vibración en muelles iguales conectados en paralelo.
c. Periodo de vibración en muelles iguales conectados en serie.
d. Principio de Torricelli.
e. Desintegración Radiactiva.
f. ...

Para la realización de estas actividades se recomienda y se indica:

a. Hacer trabajo grupal, aunque se pueden hacer solas, siempre es bueno una mano extra, ya sea para: unos medir mientras otros anotan, etc. *(Los grupos de trabajo dos a tres son suficiente, más es multitud, trabajan uno o dos y los demás se montan a lomo de los compañeros; una cosa es la colaboración en equipo, otra ser un idiota o un vivo*). También puede recurrir a algún par de amigos y/o familiares si no tiene, puede o quiere formar equipo con alguien del curso.
b. El procesamiento de la información y cálculos siempre es bueno hacerlo en equipo, ya sea para compartir ideas, auto-corrección de resultados, a fin de ampliar los datos, etc.
c. La transcripción de la información de los datos y los resultados a tablas, así como los gráficos que se indiquen en el cuaderno de laboratorio, así como las conclusiones, son una actividad exclusivamente individuales, aquí se termina el equipo.

   Importante: al final de sus actividades en el cuaderno, hacer un resumen de todos los resultados importantes de las actividades de laboratorio desarrolladas. (*Una conclusión general final*)

2.1.- Constante Elástica (usando el periodo de vibración)

En el Laboratorio de Física I determinamos la constante elástica de un resorte (*liga de goma*) trabajando con la Ley de Hookey, esto es midiendo la fuerza (*peso*) aplicado al resorte y su deformación respectiva, entendiendo que en ciertos rangos ambas cantidades obedecen a una relación lineal.

El procedimiento en este punto será un poco diferente ya que no estamos interesados en fabricar un dinamómetro sino establecer una unidad de partida (***la constante elástica de una sola liga en función de su periodo de vibración***) y luego ver como varía este valor cuando colocamos resortes (*ligas*) en combinaciones en paralelo y en serie de los mismo; partiendo del hecho que todos los resortes (*ligas*) son iguales.

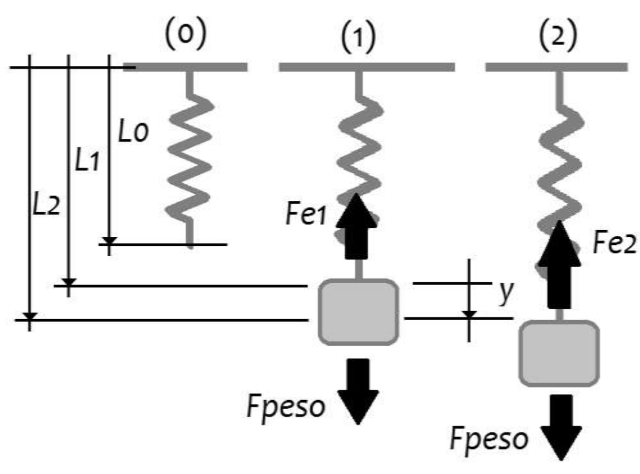
2.1.1.- Vibraciones armónicas en sistema muelle-masa

Analicemos primero la dinámica del asunto; si se tiene un muelle (resorte o liga elástica) y se coloca el elástico como indica la figura inferior tendremos una longitud inicial (***Lo***); luego pondremos una masa conocida (***mo***) en el extremo inferior del elástico colgado y por ley de Hooke se estira alcanzando una nueva longitud (***L1***); donde se debe cumplir que:

$$F_{eslastica} = -K \cdot (L1 - Lo) = -K \cdot (\Delta L)$$

$$\textit{pero al estar en equilibrio} \Rightarrow$$

$$K \cdot (L1 - Lo) = mo \cdot ag$$



En este nuevo punto de equilibrio estiramos la masa hacia abajo ($\downarrow$) con una fuerza externa (***F****ext*) hasta alcanzar una distancia (***L2***) y posteriormente soltamos la masa, provocando un desequilibrio de fuerzas en ese momento, ya que $F_{elastica} > F_{peso}$, aplicando la Segunda Ley de Newton resulta:

$$+\downarrow \sum Fy = m \cdot a_y \rightarrow$$

$$-F_{elastica} + m \cdot ag = m \cdot a_y \rightarrow$$

$$pero\ la\ magnitud\ de:\ F_{elastica} = K \cdot (L2 - L0) = K \cdot (L2 - L1) + K \cdot (L1 - Lo)$$

$$resulta:\ -K \cdot (L2 - L1) - K \cdot (L1 - Lo) + m0 \cdot ag = m0 \cdot a_y \rightarrow -K \cdot (L2 - L1) = m0 \cdot a_y$$

$$sea:\ L2 - L1 = y$$

$$recordado\ que\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ entonces:$$

$$m0 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + K \cdot y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m0} \cdot y = 0 \Leftrightarrow y'' + \omega^2 \cdot y = 0$$

El resultado es una ecuación diferencial de un **movimiento armónico simple**; cuya respuesta es:

$$y = f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$donde:\ \omega^2 = \frac{K}{m0} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m0}{K}} \Leftrightarrow K = \frac{4\pi^2 \cdot m0}{T^2}$$

Donde "***K***" se mide en Newtons/m o Dinas/cm, dependiendo de las unidades de masa que usemos (gramos o kilogramos).

2.1.2.- Procedimiento

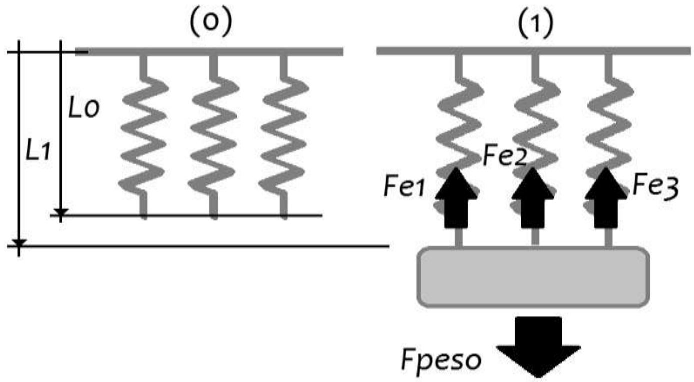
1. Esta actividad se recomienda trabajar en equipo, o al menos en parejas, uno de los compañeros trabaja instalando y manipulando el equipo, el otro toma los datos.
2. El equipo a usar implica: un cronometro (*su teléfono móvil*), un recipiente pequeño (*botella de agua de 500 ml*), y una liga elástica de carpetas. Además de un cordel para sostener el elástico a un perfil fijo en su parte superior y atar la botella en su parte inferior al colgarlo.
3. Primero atamos el elástico en la parte superior a un tubo o perfil horizontal elevado a la altura de nuestras cabezas preferiblemente y anotamos la longitud del elástico (la goma solamente) antes de ser estirada. Esa será nuestra longitud ***L0***.
4. Atamos luego la botella pequeña la que hemos llenado con agua (500 cm^3) y cerrado (*no la volveremos a abrir en ningún otro momento y esta será la masa para las dos siguientes actividades*). El elástico se estirará hasta alcanzar una nueva longitud de equilibrio y anotamos esa cantidad, será nuestra ***L1***.

5. Según la **Ley de Hooke** el valor de K para un resorte (*K1*) debe ser igual a: $K1 = (m0 \cdot ag)/(L1 - L0)$, aquí usaremos como unidades centímetros, gramos y segundos, el resultado será en dinas/cm. Use como valor de la gravedad: 980 cm/s^2.
6. El siguiente paso es determinar el periodo de vibración del sistema, para eso estiramos verticalmente la masa una pequeña distancia hacia abajo (*un centímetro es suficiente a fin de reducir el bamboleo al mínimo*), y contamos el tiempo de diez subidas y bajadas de la masa. Anotamos ese tiempo, será: t1; repetimos estos dos veces más para tener tres tiempos y luego promediamos y dividimos entre 10 para tener el periodo de vibración promedio de la masa; esto es: $T = (t1 + t2 + t3)/30$.
7. Determinamos ahora el valor de la constante elástica de la liga usando su relación con el periodo: $K1 = (4\pi^2 \cdot m0)/(T1)^2$; las unidades nuevamente en gramos y segundos.
8. Comparamos ambos resultados y concluimos de ello.

2.2.- Vibración de sistemas masa y resortes colocados en paralelo

2.2.1.- Vibraciones armónicas en sistemas masa - resortes en paralelo

Cuando se colocan varios resortes (iguales o no) en paralelo a una masa (*mo*), la masa desciende una cantidad (ΔL) igual en todos los elásticos.



Cuando se ha alcanzado el equilibrio debe ocurrir que las deformaciones individuales y totales de todos los elásticos han de ser las mismas: ($\Delta L1 = \Delta L2 = ... = \Delta Ln = \Delta L$); por tanto la fuerza equivalente y por ello la constante elástica del sistema del resorte-masa deben ser:

$$F_{equivalente} = F1 + F2 + ... + Fn = K1 \cdot \Delta L1 + K2 \cdot \Delta L2 + ... + Kn \cdot \Delta Ln$$
$$F_{equivalente} = (K1 + K2 + ... + Kn) \cdot \Delta L \rightarrow K_{equivalente} = \sum Ki$$

Si todos nuestros elásticos son iguales, la constante elástica equivalente del sistema será: $K_{equivalente} = n \cdot K1$; donde "***K***1" es la constante elástica del elástico individual (*que determinamos en el experimento anterior*) y "***n***" la cantidad de elásticos presentes. Por otra parte la deformación ΔL total del sistema queda en funcion de la constante elastica equivalente y dado que no variamos la masa colocada debe ocurrir: $\Delta L = F/K_{equ} \rightarrow \Delta L = F/(n \cdot K) = \Delta L_1/n$; lo que traduce que la deformación de un sistema con "*n*" resortes es igual la deformación de un solo resorte dividida por la cantidad de resortes en el sistema.

En resumen podemos señalar si todos los resortes son iguales y mantenemos constante la masa del sistema que en combinaciones en paralelo debe ocurrir:

$$K_n = n \cdot K_1$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{mo}} \cdot \sqrt{K_n}$$

$$\Delta L_n = \frac{\Delta L_1}{n}$$

2.2.2.- Procedimiento

1. Esta actividad se recomienda trabajar en equipo, o al menos en parejas, uno de los compañeros trabaja instalando y manipulando el equipo, el otro toma los datos.
2. El equipo a usar implica: un cronometro (*su teléfono móvil*), un recipiente pequeño (*botella de agua de 500 ml*), y varias ligas elásticas de carpetas. Además de un cordel para sostener las ligas elástica a un perfil fijo en su parte superior y atar la botella en su parte inferior al colgarlo.
3. Primero atamos dos elásticos en la parte superior a un tubo o perfil horizontal elevado a la altura de nuestras cabezas preferiblemente y anotamos la longitud de los elásticos (*las gomas juntas solamente*) antes de ser estiradas. Esa será nuestra longitud ***L0***.
4. Atamos luego la botella pequeña la que hemos llenado con agua (500 cm^3) y cerrado (*misma que usamos en el experimento n°1*). El elástico se estirará hasta alcanzar una nueva longitud de equilibrio y anotamos esa cantidad, será nuestra ***L1***.
5. Según la Ley de Hooke el valor de ***K*** debe ser igual a: $K = (m_0 \cdot ag)/(L_1 - L_0)$, aquí usaremos como unidades centímetros, gramos y segundos, el resultado será en dinas/cm. Use como valor de la gravedad: 980 cm/s^2.
6. El siguiente paso es determinar el periodo de vibración del sistemas, para eso estiramos verticalmente la masa una pequeña distancia hacia abajo (*un centímetro es suficiente a fin de reducir el bamboleo al mínimo*), y contamos el tiempo de diez subidas y bajadas de la masa. Anotamos ese tiempo, será: t1; repetimos estos dos veces más para tener tres tiempos y luego promediamos y dividimos entre 10 para tener el periodo de vibración promedio de la masa; esto es: $T = (t_1 + t_2 + t_3)/30$.
7. Determinamos ahora el valor de la constante elástica de la liga usando su relación con el periodo: $K = (4\pi^2 \cdot m_0)/T^2$; las unidades nuevamente en gramos y segundos. Comparamos nuevamente con el resultado del paso 5.
8. Repetimos los pasos: 3 a 7 tres veces más, pero ahora con tres, cuatro y cinco ligas en cada caso. Tabulamos todos los datos y resultados en la siguiente tabla.

Datos iniciales:	*$Lo = ?$ (en cm)*	*$mo = ?$ (en gramos)*	*$ag = 980\ cm/s^2$*
i	***Li***	$\Delta L = Li - Lo$	$Ki = (mo \cdot ag)/\Delta Li$
1 liga			
2 ligas			
3 ligas			
4 ligas			
5 ligas			

i	***t1***	***t2***	***t3***	$T = (t1 + t2 + t3)/30$	$Ki = (4\pi^2 \cdot mo)/T^2$
1 liga					
2 ligas					
3 ligas					
4 ligas					
5 ligas					

9. En este punto hacemos un cuadro resumen de todo lo obtenido a fin de comparar resultados y tener tabulados los datos para los siguientes puntos:

i	**Defomación (ΔL)**	**Constante elástica por Ley de Hooke (*K*)**	**Periodo de vibración (*T*)**	**Constante elástica usando el periodo (*K*)**
1 liga				
2 ligas				
3 ligas				
4 ligas				
5 ligas				

10. De acuerdo a la Ley de Hooke la relación entre la deformación y la constante elástica debe ser: $Ki = mo \cdot ag \cdot \Delta Li^{-1}$; lo que implica una **relación hiperbolica**. Realizamos una gráfica de los valores Ki en función de ΔLi (*en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y otra gráfica con la transformación: $zi = 1/\Delta li \rightarrow Ki = a0 + a1 \cdot zi$. Aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "a0" y "*a1*" y comparamos con los valores teóricos esperados.

i	$yi = Ki$	$zi = 1/\Delta Li$	$zi \cdot zi$	$yi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

11. Estudiamos el comportamiento de la constante elástica y el periodo de vibración del sistema. En este caso ocurre que la relación teórica es: $Ki = (4\pi^2 \cdot mo) \cdot Ti^{-2}$; lo que implica

una **relación geométrica** de la forma: $Ki = b \cdot Ti^{a} \rightarrow \ln(Ki) = \ln(b) + a \cdot \ln(Ti)$. Realizamos una gráfica de los valores "*Ki*" en función de "*Ti*" (*en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y otra usando la transformación ($w = a0 + a1 \cdot z$). Aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "*a*" y "*b*" equivalentes.

i	$wi = \ln(Ki)$	$zi = \ln(Ti)$	$zi \cdot zi$	$wi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

Nota: recuerde que en esta transformación a lineal ocurre que: $\ln(b) = a0,\ donde: b = 4\pi^2 \cdot mo$, y que: $a = a1$, y comparamos con los valores teoricos esperados.

12. Analizaremos también el comportamiento de la constante elástica con respecto al número de ligas colocadas en paralelo, de acuerdo a la teoría la constante elástica es proporcional al número de resortes en paralelo, si todos son iguales debe ocurrir; $Ki = ni \cdot K1$, siendo por tanto una relación lineal de la forma: $Ki = a0 + a1 \cdot ni$. Realizamos las gráficas de los valores "*Ki*" en función de "*ni*" (*en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "*ao*" y "*a1*" equivalentes.

$i = ni$	$yi = Ki$	$xi = ni$	$xi \cdot xi$	$yi \cdot xi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

Nota: recuerde que en esta relación lineal ocurre que el "*ao*" debe ser un valor cercano a cero, mientras que "*a1*" debe ser un valor similar a la constante elástica de una sola liga (el resultado del primer experimento).

13. Analizaremos también el comportamiento de la deformación con respecto al número de ligas colocadas en paralelo, de acuerdo a la teoría debe ocurrir; $\Delta Li = \Delta L1/n$, siendo por tanto una relación hiperbolica de la forma: $\Delta Li = a0 + a1/ni \rightarrow yi = a0 + a1 \cdot zi$. Realizamos las gráficas de los valores *de la deformación en* función del numero de resortes en una hoja del cuaderno y de su transfomada (*a escala para apreciar las relaciones indicadas*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "*ao*" y "*a1*" equivalentes, recordemos que en este caso tenemos un comportamiento hiperbolico, esto es que:

$i = n_i$	$y_i = K_i$	$z_i = 1/n_i$	$z_i \cdot z_i$	$y_i \cdot z_i$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

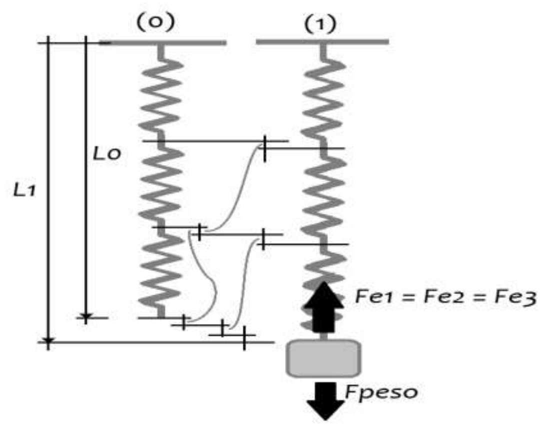
Nota: recuerde que en esta relación lineal ocurre que el "*a0*" debe ser un valor cercano a cero, mientras que "*a1*" debe ser un valor similar a la deformcaión de una sola liga (el resultado del primer experimento).

14. Concluya de todos estos resultados.

2.3.- Vibración de sistemas masa y resortes colocados en serie

2.3.1.- Vibraciones armónicas en sistemas masa - resortes en serie

Cuando se colocan varios resortes (iguales o no) en serie a una masa (*mo*), la masa desciende una cantidad (**Δ*L***), pero cada elástico experimenta una deformación individual siendo la suma de cada una de estas deformaciones particulares igual a la deformación total. Por otra parte la fuerza de peso que es sostenida por cada uno de los resortes es la misma en cada resorte individual, eso por Tercera Ley de Newton.



Cuando se ha alcanzado el equilibrio debe ocurrir que las deformaciones individuales y totales de todos los elásticos han de ser: ($\Delta L1 + \Delta L2 + ... + \Delta Ln = \Delta L$); y como las fuerzas individuales de cada resorte son las mismas y a la equivalente, entonces la constante elástica del sistema del resorte-masa debe ser:

$$F_{equivalente} = F1 = F2 = ... = Fn;\ como : Fi = Ki \cdot \Delta Li\ y\ \Delta L1 + \ \Delta L2 + ... + \Delta Ln = \Delta L\ \ entonces :$$

$$\Delta L = \frac{F1}{K1} + \frac{F2}{K2} + ... + \frac{Fn}{Kn} = \frac{F_{equivalente}}{K_{equivalente}} \rightarrow \frac{1}{K_{equivalente}} = \frac{1}{K1} + \frac{1}{K2} + ... \frac{1}{Kn} = \sum \frac{1}{Ki}$$

Si todos nuestros elásticos son iguales, la constante elástica equivalente del sistema será: $K_{equivalente} = K1/n$; donde "***K1***" es la constante elástica del elástico individual (*que determinamos en el experimento uno*) y "***n***" la cantidad de elásticos presentes. Por otra parte la deformación ΔLtotal es la suma de las deformaciones individuales, como la fuerza en cada elastico es la misma tenemos que debe ocurrir: $\Delta L = n \cdot \Delta L_1$.

En resumen podemos señalar si todos los resortes son iguales y mantenemos constante la masa del sistema que en combinaciones en serie debe ocurrir:

$$K_n = K1/n$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{mo}} \cdot \sqrt{K_n}$$

$$\Delta L_n = n \cdot \Delta L1$$

2.3.2.- Procedimiento

1. Esta actividad se recomienda trabajar en equipo, o al menos en parejas, uno de los compañeros trabaja instalando y manipulando el equipo, el otro toma los datos.
2. El equipo a usar implica: un cronometro (*su teléfono móvil*), un recipiente pequeño (*botella de agua de 500 ml*), y varias ligas elásticas de carpetas. Además de un cordel para sostener las ligas elástica a un perfil fijo en su parte superior y atar la botella en su parte inferior al colgarlo.
3. Primero atamos dos elásticos (uno al final del otro) y el extremo libre de uno de ellos a la parte superior a un tubo o perfil horizontal elevado a la altura de nuestras cabezas preferiblemente y anotamos la longitud de los elásticos combinados (*las gomas juntas solamente*) antes de ser estiradas. Esa será nuestra longitud ***L0***.
4. Atamos luego en el extremo libre de segundo elástico con la botella pequeña que hemos llenado con agua (500 cm^3) y cerrado (*misma que usamos en el experimento n°1*). El elástico se estirará hasta alcanzar una nueva longitud de equilibrio y anotamos esa cantidad, será nuestra ***L1***.
5. Según la Ley de Hooke el valor de ***K*** debe ser igual a: $K = (mo \cdot ag)/(L1 - Lo)$, aquí usaremos como unidades centímetros, gramos y segundos, el resultado será en dinas/cm. Use como valor de la gravedad: 980 cm/s^2.
6. El siguiente paso es determinar el periodo de vibración del sistema, para eso estiramos verticalmente la masa una pequeña distancia hacia abajo (*un centímetro es suficiente a fin de reducir el bamboleo al mínimo*), y contamos el tiempo de diez subidas y bajadas de la masa. Anotamos ese tiempo, será: t1; repetimos estos dos veces más para tener tres tiempos y luego promediamos y dividimos entre 10 para tener el periodo de vibración promedio de la masa; esto es: $T = (t1 + t2 + t3)/30$.
7. Determinamos ahora el valor de la constante elástica de la liga usando su relación con el periodo: $K = (4\pi^2 \cdot mo)/T^2$; las unidades nuevamente en gramos y segundos.
8. Repetimos los pasos: 3 a 7 tres veces más, pero ahora con tres, cuatro y cinco ligas en cada caso, recuerde que estamos en serie, es una liga tras otra. Tabulamos todos los datos y resultados en la siguiente tabla.

Datos iniciales:	$L0 = ?$ (en cm)			$m0 = ?$ (en gramos)	$ag = 980\ cm/s^2$
i	***Li***			$\Delta L = Li - L0$	$Ki = (m0 \cdot ag)/\Delta Li$
1 liga					
2 ligas					
3 ligas					
4 ligas					
5 ligas					

i	***t1***	***t2***	***t3***	$T = (t1 + t2 + t3)/30$	$Ki = (4\pi^2 \cdot m0)/T^2$
1 liga					
2 ligas					
3 ligas					
4 ligas					
5 ligas					

9. En este punto hacemos un cuadro resumen de todo lo obtenido a fin de comparar resultados y tener tabulados los datos para los siguientes puntos:

i	**Defomación (ΔL)**	**Constante elástica por Ley de Hooke (*K*)**	**Periodo de vibración (*T*)**	**Constante elástica usando el periodo (*K*)**
1 liga				
2 ligas				
3 ligas				
4 ligas				
5 ligas				

10. De acuerdo a la Ley de Hooke la relación entre la deformación y la constante elástica debe ser: $Ki = m0 \cdot ag \cdot \Delta Li^{-1}$; lo que implica una relación hiperbolica de la forma: $zi = 1/\Delta Li \rightarrow Ki = a0 + a1 \cdot zi$. Realizamos una gráfica de los valores "*Ki*" en función de " ΔLi" (*en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes *a* y *b* equivalentes. No de olvidar de hacer la gráfica de "*yi*" contra "*zi*" para ver la relación tras la transformación.

i	$yi = Ki$	$zi = 1/\Delta Li$	$zi \cdot zi$	$yi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

11. De igual manera estudiaremos el comportamiento de la constante elástica y el periodo de vibración del sistema. En este caso ocurre que la relación teórica es: $Ki = (4\pi^2 \cdot mo) \cdot Ti^{-2}$; lo que implica una relación geométrica de la forma: $Ki = b \cdot Ti^a \to \ln(Ki) = \ln(b) + a \cdot \ln(Ti)$. Realizamos una gráfica de los valores "*Ki*" en función de "*Ti*" (*en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes *a* y *b* equivalentes. Igual hacemos la gráfica de "*yi*" contra "*xi*" para ver la relación lineal que aparece tras la transformación.

i	$wi = \ln(Ki)$	$zi = \ln(Ti)$	$zi \cdot zi$	$wi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

Nota: recuerde que en esta transformación a lineal ocurre que: $\ln(b) = a0$, $donde: b = 4\pi^2 \cdot mo$, y que: $a = a1$, y comparamos con los teoricos esperados.

12. Analizaremos también el comportamiento de la constante elástica con respecto al número de ligas (*ni*) colocadas en serie, de acuerdo a la teoría la constante elástica es proporcional al inverso del número de resortes en serie, si todos son iguales debe ocurrir; $Ki = K1/ni$, siendo por tanto una relación hiperbolica de la forma: $Ki = a0 + a1/ni \to yi = a0 + a1 \cdot zi$. Realizamos una gráfica de los valores "*Ki*" en función de "*ni*" *en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "*a0*" y "*a1*" equivalentes. Igual hacemos la gráfica de "*yi*" contra "*zi*" para ver la relación lineal que aparece tras la transformación.

$i = ni$	$yi = Ki$	$zi = 1/ni$	$zi \cdot zi$	$yi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

Nota: recuerde que en esta relación lineal ocurre que el "*a0*" debe ser un valor cercano a cero, mientras que "*a1*" debe ser un valor similar a la constante elástica de una sola liga (el resultado del primer experimento).

13. Analizaremos también el comportamiento de la deformación con respecto al número de ligas colocadas en paralelo, de acuerdo a la teoría debe ocurrir; $\Delta Li = n \cdot \Delta L1$, siendo por tanto una relación lineal de la forma: $Ki = a0 + a1 \cdot ni$. Realizamos una gráfica de los valores

de la deformación en función del numero de resortes *en una hoja del cuaderno a escala para ver la relación indicada*) y aplicando método de mínimos cuadrados determinamos los valores de las constantes "*ao*" y "*a1*" equivalentes, recordemos que en este caso tenemos un comportamiento lineal, esto es que:

i = ni	*yi = Ki*	*xi = ni*	*xi · xi*	*yi · xi*
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

Nota: recuerde que en esta relación lineal ocurre que el "*ao*" debe ser un valor cercano a cero, mientras que "*a1*" debe ser un valor similar a la deformación de una sola liga (el resultado del primer experimento).

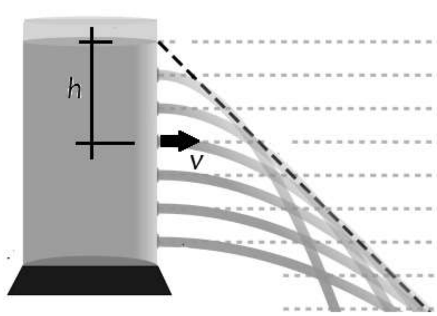
14. Concluya de todos estos resultados.

2.4.- Principio de Torricelli

2.4.1.- Evangelista Torricelli

Evangelista Torricelli (1608-1647) fue un físico italiano del siglo XVII que inventó el barómetro de mercurio y demostró que se podía tener un recipiente sin contenido al extraer el aire. De padres lo enviaron con su tío Jacopo, un fraile que lo educó; al ver su potencial fue hasta Roma para que estudiar ciencias con el benedictino Benedetto Castelli (1579-1645), quien enseñaba matemáticas en el colegio de la Sapienza y había sido uno de los primeros discípulos de Galileo. Benedetto presentó a Torricelli con Galileo a poco de la muerte del sabio. De ahí pese a su deseo de volver a Roma, Torricelli cedió a las ofertas de Fernando II de Médici y fue nombrado profesor de matemáticas en la Academia de Florencia y se estableció definitivamente en esta ciudad.

En 1643 Torricelli utilizó el mercurio haciéndolo ascender en un tubo cerrado, creando vacío en la parte superior, empujado por el peso del aire de la atmósfera. Demostró que el aire tiene peso, e inventó el barómetro. La unidad de presión ***torr*** (*la presión de 1 mmHg $\approx$133,3 pascales*) se nombró en su memoria. También formulo el principio que lleva su nombre y que estudia el flujo de un líquido contenido en un recipiente, a través de un pequeño orificio, bajo la acción de la gravedad. Publicó su trabajo sobre el movimiento bajo el título Opera geométrica. La publicación, junto a esta obra, de varios trabajos sobre las propiedades de las curvas cicloides le supuso una agria disputa con Roberval, quien le acusó de plagiar sus soluciones del problema de la cuadratura de dichas curvas. Aunque no parece haber dudas de que Torricelli llegó al mismo resultado de forma independiente, el debate sobre la primicia de la solución se prolongó hasta su muerte.



La formulación del Principio de Torricelli, tuvo sus bases en los conocimientos de los mentores de Torricelli. El principio tomo como referencia los estudios acerca de la caída de los cuerpos de Galileo Galilei y complementado con las investigaciones en torno a los orificios de Benedetto Castelli. Esto le permitió dar respuesta a la primera interrogante, la cual se enfocaba en definir la forma que tomaba el líquido al salir por el agujero.

Isaac Newton intentó comprobar la validez del Principio, pero no obtuvo resultados concluyentes; sin embargo no dejo de afirmar que consideraba que este era totalmente válido. Fue finalmente Daniel Bernoulli quien tomo en cuenta todos estos enunciados, e hizo sus propios aportes para su principio de conservación de energía. Sin embargo, ello no se consideró relevante hasta muchos años después.

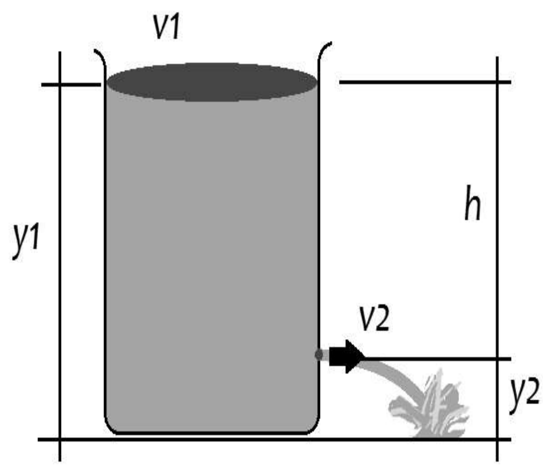
2.4.2.- El Principio de Torricelli

El **Principio de Torricelli** ha sido uno de los postulados de gran utilidad en la mecánica de fluidos y permite estudiar el comportamiento de un fluido mientras este se encuentra en movimiento dentro de un sistema cerrado. Este principio es un caso particular de uno más grande, el **Principio de Bernoulli** y es el que da forma a este teorema. Parte de que todo fluido a estudiar debe contar con dos características: no hay viscosidad y tampoco rozamiento (*no hay perdidas por fricción y por tanto de energía en el sistema, o para los efectos reales estas perdidas son despreciables*). Cuando se conoce que se cumplen ambos, entonces se dice que el **fluido es ideal**. En base a eso, si se asume que la energía siempre permanece constante, esta será el resultado de la suma de: energía cinética, energía gravitacional y energía de presión.

Al considerarse que el **Principio de Torricelli** y **Principio de Bernoulli** se encuentran relacionados, es necesario que ambos sean definidos para su entendimiento. Bernoulli basó su trabajo en definir el comportamiento de un fluido, que se mueve a través de una línea de corriente. Este puede ser líquido o gaseoso y estableció que en el momento en que la velocidad del fluido aumentaba, era porque la presión disminuía, en este principio el fluido no debe presentar viscosidad ni rozamiento, además, la energía debe ser constante. Teniendo en cuenta este último punto, se definen tres tipos de energías: energía cinética, energía gravitacional y energía de presión. En el momento en que exista variación en alguna, las otras dos también deben variar para mantener la constancia. Todos estos detalles, dan pie a la formulación del Principio de Torricelli que se centra en el estudio de un fluido contenido en un recipiente y este fluye a través de un orifico por efecto de una fuerza gravitacional. Finalmente, se considera como un método que permite calcular la velocidad de salida del líquido por el orifico. Cuando Torricelli presentó su postulado, no se mostró importancia alguna, por lo que terminó siendo olvidado. Fue Bernoulli quien se encargó de comprobar que era válido, haciendo sus propios aportes en torno a este. Así se concluyó que ambos principios trabajan conjuntamente. El Principio de Torricelli señala:

> *La velocidad con que fluye un líquido a través del agujero de un recipiente, es comparable con la velocidad a la que cae un cuerpo al lado del recipiente cuando se encuentra a la misma altura del líquido hasta el centro de gravedad del orificio.*

Para asegurar que el principio de Torricelli es válido, es necesaria la aplicación de distintas ecuaciones. Pero se debe tomar en cuenta que es necesario ignorar todos aquellos factores que se consideran insignificantes ya que no influyen en los resultados. Se determina que son insignificantes las pérdidas relacionadas con la viscosidad en el principio de Torricelli, y la fricción producto de la acción del aire para la teoría de caída libre. También se desprecia que el agua que sale por el agujero no lo hace usando toda el área, sino que es una menor realmente.



En esencia partiendo del Principio de Bernoulli se tiene que:

$$\frac{P1}{\rho \cdot ag} + y1 + \frac{v1^2}{2 \cdot ag} = \frac{p2}{\rho \cdot ag} + y2 + \frac{v2^2}{2 \cdot ag}$$

Como la presión que hay en la parte superior del recipiente de líquido es igual a la misma presión atmosférica donde esta el agujero, las energías por presión se cancela, luego, despejando la velocidad de salida del líquido en el agujero resulta:

$$y1 + \frac{v1^2}{2 \cdot ag} = y2 + \frac{v2^2}{2 \cdot ag} \rightarrow (y1 - y2) + \frac{v1^2}{2 \cdot ag} = \frac{v2^2}{2 \cdot ag} \rightarrow$$

$$v2 = \sqrt{2 \cdot ag \cdot \left(h + \frac{v1^2}{2 \cdot ag}\right)}$$

Dado que el área del agujero es mucho menor que el área en la superficie del liquido arriba, entonces debe ocurrir que en la mayoría de los casos: $Q = A1 \cdot v1 = A2 \cdot v2 \rightarrow v1 = v2 \cdot (A2/A1)$, por tanto la velocidad con que desciende el liquido ($v1$) debe ser mucho menor y despreciable comparada con que la que sale por el agujero y el resultado es que la velocidad del líquido en el agujero depende únicamente de la altura entre la superficie del liquido y el agujero (h), y es el mismo valor que el de un objeto que cae desde el reposo de igual altura.

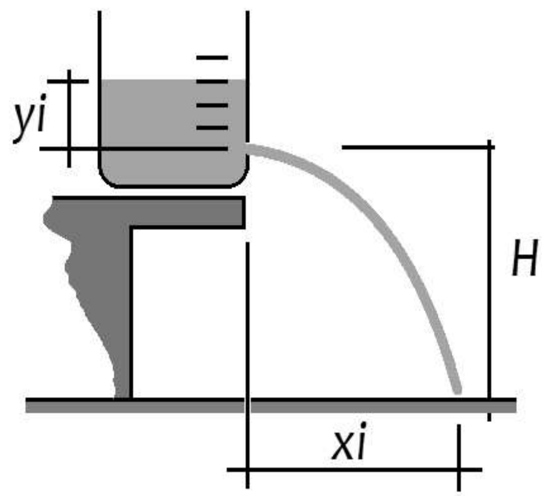
$$v_{agujero} = \sqrt{2 \cdot ag \cdot h}$$

2.4.3.- Procedimiento

1. Esta actividad se recomienda trabajar en equipo, o al menos en parejas, uno de los compañeros trabaja instalando y manipulando el equipo, el otro toma los datos.
2. El equipo a usar son: reglas de medida o cintas métricas, un botella grande transparente, un clavo para hacer un agujero a la botella, marcadores, algunos objetos como lápices o

palos pequeños que sirvan para marcar posiciones en el piso, agua, una mesa alta y hacerlo en el patio para no mojar toda la casa.

3. El primer paso es agarrar nuestra botella grande y hacer un agujero a uno o dos centímetros del fondo. A partir de este punto usando un marcador medimos hacia arriba en la botella y realizamos marcas cada 5 cm hasta llegar a la parte superior de la botella. Debemos tener no menos de cinco marcas sobre el agujero.
4. Llenamos la botella con agua hasta arriba, cerramos para que no salga y la colocamos al borde de una mesa (ver esquema abajo).



5. Medimos la altura entre el piso y la mesa, esta lectura nos permitirá calcular el tiempo que el agua cae hasta el piso (ello no varia ya que la velocidad inicial vertical es nula), para ello si "*H*" es la altura medida, este tiempo es: $t = \sqrt{2H/ag}$, siendo nuestra aceleración de gravedad 9,8 m/s^2 o 980 cm/s^2.
6. Abrimos la tapa que mantiene el agua en la botella y el chorro cae al piso, conforme el nivel del agua pasa por cada una de las marcas que hicimos en la botella, vamos colocando una señal (*lápiz, palo, piedra, etc*.) en el piso para indicar la distancia horizontal alcanzada en el piso por el chorro en ese instante.
7. Una vez que el nivel del agua llega al agujero, medimos en el piso la distancia horizontal entre el borde de la mesa y las distintas marcas que colocamos en la misma, recordando que la más cerca a la mesa se corresponde con la marca inferior de la botella y así.
8. Repetimos esto dos veces más para confirmar los valores y calcular un promedio de las distancias "xi" en cada marca respectiva de la botella "yi".

i	yi	xi_1	xi_2	xi_3	$xi = \Sigma\, xi/3$	$vi = xi/t$
1						
2						
3						
4						
5						

9. El comportamiento del **Principio de Torricelli** es de tipo geométrico: $vi = \sqrt{2 \cdot ag \cdot yi}$; luego la transformación a lineal es: $\ln(vi) = \ln b + a \cdot \ln yi \leftrightarrow wi = a0 + a1 \cdot zi$, aplicando método de mínimos cuadrados y determinamos los valores de "*a0*" y "*a1*"; y a partir de ahí los valores de "***a***" y "***b***" respectivamente, el valor de "a" que se corresponde con el exponente al que se eleva "yi" debe ser una valor cercano a 1/2; mientras que el valor de "b" debe ser cercano a $\sqrt{2 \cdot ag}$.

i	$zi = \ln(yi)$	$wi = \ln(vi)$	$zi \cdot zi$	$wi \cdot zi$
1				
2				
3				
4				
5				
Suma				

10. No se olvide de hacer las gráficas de "*vi*" contra "*yi*", y de "*wi*" contra "*zi*" para ver en papel el comportamiento (una hoja de cuaderno para cada gráfica).
11. Concluya de sus resultados.

2.5.- Desintegración Radiactiva

2.5.1.- La desintegración radiactiva en átomos

Los núcleos atómicos están compuestos por protones y neutrones, que se mantienen unidos por la denominada fuerza fuerte. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones que no conducen a una configuración estable. Estos núcleos son inestables o radiactivos. Los núcleos inestables tienden a aproximarse a la configuración estable emitiendo ciertas partículas. Cuando un núcleo individual se transforma en otro con la emisión de radiación, se dice que el núcleo decae. El decaimiento radioactivo se produce en todos los núcleos con números atómicos (Z) mayores que 92 y en algunos isótopos inestables con números atómicos menores de 93.

Los tipos de desintegración radiactiva se clasifican de acuerdo a la clase de partículas emitidas.

1. **Desintegración alfa:** El elemento radiactivo de número atómico Z, emite un núcleo de Helio (dos protones y dos neutrones), el número atómico disminuye en dos unidades y el número másico en cuatro unidades, produciéndose un nuevo elemento situado en el lugar Z-2 de la Tabla Periódica.
2. **Desintegración beta**: El núcleo del elemento radiactivo emite un electrón (*esto es una partícula con carga negativa*), en consecuencia, su número atómico aumenta en una unidad, pero el número másico no se altera. El nuevo elemento producido se encuentra el lugar Z+1 de la Tabla Periódica. También puede ocurrir una desintegración beta positiva donde el nuevo elemento reduzca un lugar en la tabla a Z-1; en este caso se ha emitido un positrón (*o antielectrón, que tiene carga positiva*). En este caso a diferencia del anterior donde un neutrón se desprende de la energía extra liberando el electrón y transformándose en protón, aquí un protón libera un positrón (su carga positiva) y se convierte en un neutrón absorbiendo la energía extra en el núcleo.
3. **Desintegración gamma**: El núcleo del elemento radiactivo emite un fotón de alta energía, la masa y el número atómico no cambian, solamente ocurre un reajuste de los niveles de energía ocupados por los nucleones.

De la observación de los procesos de desintegración en distintas sustancias se extraen las siguientes relaciones cualitativas:

1. La velocidad de desintegración decrece a medida que los núcleos radiactivos se van desintegrando.
2. No podemos predecir en que instante se desintegrará un núcleo concreto, ni qué núcleo se va a desintegrar en un determinado instante.

Aunque, como se indica, no se puede predecir cuando un átomo en particular experimentara una transformación, si se puede conocer en una cantidad definida de esos átomos cuantos de ellos se transformaran en un tiempo determinado. En general se tiene que la tasa de decaimiento es proporcional al número de núcleos presentes en la materia en cuestión, esto es sea "**N**" la cantidad de átomos presentes en un momento dado, entonces la cantidad de átomos que se transforma en un tiempo dado es:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt \rightarrow \int_{No}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{t=0}^{t} dt \rightarrow \ln N - \ln No = -\lambda \cdot t \rightarrow \ln(N/No) = -\lambda \cdot t \rightarrow$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{No} \cdot \boldsymbol{e}^{-\lambda \cdot t}$$

Aquí "λ" es una constante de proporción y se pone negativa ya que la cantidad de átomos "**N**" después de la transformación son menores que la cantidad original "**No**". La cantidad "λ" se conoce como "**constante de desintegración radiactiva**", es la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo. Su inversa ($\tau = 1/\lambda$) se le llama **tiempo de vida media de un radioisótopo** y es el tiempo promedio de vida de un átomo radiactivo antes de desintegrarse. El tiempo que transcurre hasta que la cantidad de núcleos radiactivos de un isótopo radiactivo se reduzca a la mitad de la cantidad inicial se le conoce como **período de semi-desintegración** ($T_{1/2}$), y se puede determinar como:

$$N = No/2 = No \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \rightarrow$$

$$\ln(1/2) = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow$$

$$T_{1/2} = \ln(2)/\lambda = \tau \cdot \ln(2)$$

Otros fenómenos físicos análogos a la desintegración radioactiva son: la descarga de un condensador a través de una resistencia y la descarga de un tubo que contiene fluido viscoso a través de un capilar.

Cada radioisótopo tiene un **período de semi-desintegración** característico, en general diferente de otros isótopos. Ejemplos son:

Elemento	Periodo de semi-desintegración	Se transforma en	Libera
Uranio 235 (Z=92)	704 millones años	Torio 231 (Z=90)	Partícula alfa
Uranio 238 (Z=92)	4468 millones años	Torio 234 (Z=90)	Partícula alfa
Radio 226 (Z=88)	1600 años	Radón 222 (Z=86)	Partícula alfa
Radón 222 (Z=86)	3,8 días	Polonio 218 (Z=84)	Partícula alfa
Bismuto 207 (Z=83)	31,55 años	Plomo 208 (Z=82)	Positrón ($\beta+$)
Cesio 137 (Z=55)	30,23 años	Bario 137 (Z=56)	Electrón ($\beta-$) + γ
Yodo 131 (Z=53)	8,02 días	Xenón 131 (Z=54)	Electrón ($\beta-$) + γ
Cadmio 109 (Z=48)	462,6 días	Plata 109 (Z=49)	Electrón ($\beta-$)
Cobalto 60 (Z=27)	5,27 años	Níquel 60 (Z=28)	Electrón ($\beta-$) + γ
Calcio 41 (Z=20)	103000 años	Potasio 41 (Z=19)	Positrón ($\beta+$)
Potasio 40 (Z=19)*	12780 millones años	11% Argón 40 (Z=18)	Positrón ($\beta+$)
		89% Calcio 40 (Z=20)	Electrón ($\beta-$)
Oxigeno 15 (Z=8)	122 segundos	Nitrógeno 15 (Z=7)	Positrón ($\beta+$)
Carbono 14 (Z=6) **	5760 años	Nitrógeno 14 (Z=7)	Electrón ($\beta-$)

* Se usa la transformación del Potasio 40 para medir la edad de las rocas.

** Se usa la transformación del Carbono 14 para medir la edad de materiales orgánicos.

2.5.2.- Procedimiento

1. Esta actividad se recomienda trabajar en equipo, o al menos en parejas, uno de los compañeros trabaja instalando y manipulando el equipo, el otro toma los datos, pero a diferencia de las anteriores también se puede hacer individual.
2. El equipo a usar implica: una caja de zapatos o similar; monedas (unas cien como mínimo), pero las podemos reemplazar con fichas o fabricarlas usando cartón grueso (*el de cajas*) y usando marcador marcar una de las caras de las fichas recortadas (*no necesita que sean redondas, puede cortarlas cuadradas*).
3. Colocamos en la caja las 100 o más fichas, esa será la cantidad inicial "No". Luego sacudimos la caja unos minutos, la abrimos y volteamos las fichas en una mesa, separamos las marcadas, contamos las restantes (*las no marcadas*) y anotamos este valor, será nuestro "*Ni*"; volvemos a colocar las fichas no marcadas en la caja y repetimos el procedimiento unas tres veces más, lo que nos da un total de cinco valores de *Ni*, contando el inicial por supuesto.

4. Repetimos el paso 3 dos veces más desde el inicio, y anotamos todos estos datos en la tabla indicada abajo. Promediamos los resultados de los tres casos y anotamos la media en números enteros.

i	*N 1°vez*	*N 2°vez*	*N 3°vez*	$N = \Sigma N/3$ **(valor entero)**
1	*No =*	*No =*	*No =*	*No*
2				
3				
4				
5				

5. El comportamiento de los datos debe seguir una **regresión exponencial** similar al comportamiento de la desintegración radiactiva, esto es: $Ni = No \cdot e^{-\lambda \cdot ti}$; lo que lleva a una transformación lineal de la forma: $\ln(Ni) = \ln(No) - \lambda \cdot ti \leftrightarrow yi = ao + a1 \cdot xi$; aquí aplicamos método de mínimos cuadrados y obtenemos los valores de "*a0*" y "*a1*", y luego determinamos las cantidades: "*No*" y " λ" de la forma exponencial. Conociendo la constante de desintegración radiactiva (λ), podemos determinar el tiempo de vida media del conjunto (τ) y el periodo de semi-desintegración ($T_{1/2}$) de nuestro "material radiactivo".

i = ti	*wi = ln(Ni)*	*xi = ti*	*xi·xi*	*xi·wi*
1				
2				
3				
4				
n = 5				
Suma:				

6. No se olvide de hacer las gráficas de "Ni" contra "ti", y de "yi" contra "xi" para ver los comportamientos respectivos (*una hoja del cuaderno cada una, a escala*).
7. Concluya de todos sus resultados en la actividad.

ANEXOS

A.1.- Derivadas

A.1.1.- Nomenclatura en derivadas

Sean: $y = f_1(x)$, $z = f_2(t)$ y $w = f_3(x,t)$, funciones de "*x = cualquier variable independiente, normalmente una coordenada de posición*" y de "*t = tiempo*", entonces:

	Notación de Lagrage	*Notación de Leibniz*	*Notación de Newton*	*Notación de Euler (D) y Jacovi (∂)*
		Derivadas ordinarias		
1° orden	y'	$\frac{dy}{dx}$	$\dot{z}$	Dy
2° orden	y''	$\frac{dy'}{dx} = \frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$	$\ddot{z}$	D^2y
3° orden	y'''	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\dddot{z}$	D^3y
4° orden	y^{iv} ó $y^{(4)}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\ddddot{z}$ ó $\overset{4}{\dot{z}}$	D^4y
5° orden	y^{v} ó $y^{(5)}$	$\frac{d^5y}{dx^5}$	$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{z}$ ó $\overset{5}{\dot{z}}$	D^5y
...	...	...		...
n (enesimo) orden	$y^{(n)}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\overset{n}{\dot{z}}$	D^ny
		Derivadas parciales		
De 1° orden		$\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$		$\partial_x w$ y $\partial_t w$
De 2° orden		$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$		$\partial_{xx} w$ y $\partial_{tt} w$
Mixtas de 2° orden		$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}$		$\partial_{tx} w$ y $\partial_{xt} w$

Nota: la notación de Newton no se usa en la actualidad salvo en derivadas en función del tiempo (*hasta la segunda*) y se aplica sólo en algunas ramas de la mecánica para denotar rapidez, velocidades y aceleraciones. En derivadas parciales mixtas se tiene que el orden es como se indica: $\partial_{tx} w = \partial^2 w/\partial x \partial t = \partial/\partial x(\partial w/\partial t)$ pero en virtud del **teorema de Clairaut-Schwarz** para derivadas mixtas debe ocurrir que el resultado es igual e independiente del orden de quién es primero.

A.1.2.- Propiedades de las derivadas

sean : $a =$ constante (número), $v = f(x)$, $u = g(x)$, $y = f(u)$ *entonces* :

$w = a \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = 0$	Derivada de una constante o un número
$w = a \cdot v \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = a \cdot \dfrac{dv}{dx}$	Propiedades de linealidad
$w = v \pm u \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{du}{dx}$	
$w = v \cdot u \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dv}{dx} \cdot u + v \cdot \dfrac{du}{dx}$	Regla del producto de funciones
$w = \dfrac{v}{u} \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{(dv/dx) \cdot u - v \cdot (du/dx)}{u^2}$ con $u \neq 0$	Regla del cociente de funciones
$w = y \circ u \Rightarrow \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$	Regla de la cadena

A.1.3.- Derivadas de funciones comunes

Polinomios, exponenciales y logarítmicas	
$y = x^a \Rightarrow dy/dx = a \cdot x^{a-1}$	$y = x^x \Rightarrow dy/dx = x^x \cdot (1 + \ln x) \quad (x > 0)$
$y = e^x \Rightarrow dy/dx = e^x$	$y = \ln x \Rightarrow dy/dx = 1/x \quad (x > 0)$
$y = a^x \Rightarrow dy/dx = a^x \cdot \ln a$	$y = \log_a x \Rightarrow dy/dx = 1/(x \cdot \ln a) \quad (x > 0;\ a \neq 1)$
Trigonométricas	
$y = \cos x \Rightarrow dy/dx = -sen\, x$	$y = arco \cos x \Rightarrow dy/dx = -1/\sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$
$y = sen\, x \Rightarrow dy/dx = \cos x$	$y = arco\, sen\, x \Rightarrow dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$
$y = \tan x \Rightarrow dy/dx = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$y = arco \tan x \Rightarrow dy/dx = 1/(1+x^2)$
$y = \sec x \Rightarrow dy/dx = \sec x \cdot \tan x$	$y = arco \sec x \Rightarrow dy/dx = 1/\left(x \cdot \sqrt{x^2-1}\right) \quad (\lvert x \rvert > 1)$
$y = \csc x \Rightarrow dy/dx = -\csc x \cdot \cot x$	$y = arco \csc x \Rightarrow dy/dx = -1/\left(x \cdot \sqrt{x^2-1}\right) \quad (\lvert x \rvert > 1)$
$y = \cot x \Rightarrow dy/dx = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$	$y = arco \cot x \Rightarrow dy/dx = -1/(1+x^2)$
Hiperbólicas	
$y = \cosh x \Rightarrow dy/dx = senh\, x$	$y = arco \cosh x \Rightarrow dy/dx = 1/\sqrt{x^2-1} \quad (x > 1)$
$y = senh\, x \Rightarrow dy/dx = \cosh x$	$y = arco\, senh\, x \Rightarrow dy/dx = 1/\sqrt{x^2+1}$
$y = \tanh x \Rightarrow dy/dx = \operatorname{sech}^2 x$	$y = arco \tanh x \Rightarrow dy/dx = 1/(1-x^2) \quad (\lvert x \rvert > 1)$
$y = \operatorname{sech} x \Rightarrow dy/dx = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$	$y = arco \operatorname{sech} x \Rightarrow dy/dx = -1/\left(\lvert x \rvert \cdot \sqrt{1-x^2}\right) (0 < x < 1)$
$y = \operatorname{csch} x \Rightarrow dy/dx = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$	$y = arco \operatorname{csch} x \Rightarrow dy/dx = -1/\left(\lvert x \rvert \cdot \sqrt{1+x^2}\right) (x \neq 0)$
$y = \coth x \Rightarrow dy/dx = -\operatorname{csch}^2 x$	$y = arco \coth x \Rightarrow dy/dx = 1/(1-x^2) \quad (\lvert x \rvert < 1)$

A.2.- Sumatoria (Operador suma)

La **sumatoria** (o **sumatorio** según la RAE) también conocido como **operación de suma** es una notación matemática que permite representar sumas de varios (n) sumandos o incluso infinitos sumandos, evitando el empleo de los puntos suspensivos o de una explícita notación de todos los elementos sumados, y se expresa con la letra griega sigma mayúscula ($\sum$).

Su inicio parte de un entero positivo "***m > 1***" hasta alcanzar otra cantidad natural "***n > m***" y sea "***f(xi)***" las cantidades que estamos sumando, tenemos que esta operación se denota de la forma:

$$\sum_{i=m}^{n} f(xi) = f(x_m) + f(x_{m+1}) + f(x_{m+2}) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)$$

Como ejemplos:

$$sea : f(xi) = i \rightarrow \sum_{i=3}^{8} i = 3+4+5+6+7+8 = 33$$

$$sea : f(xi) = \log(i) \rightarrow \sum_{i=2}^{6} \log(i) = \log(2)+\log(3)+\log(4)+\log(5)+\log(6) = 2,8573\ldots$$

$$sea : f(xi) = \frac{1}{i^2} \rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2} = 1,4636\ldots$$

Cuando se parte de la unidad (***m = 1***) hasta una cantidad "n" la expresión se puede simplificar a como sigue:

$$\sum f(xi) = \sum^{n} f(xi) = \sum_{i=1}^{n} f(xi)$$

El operador suma tiene algunas propiedades importantes, entre ellas:

$sean : a =$ constante (número), $vi = f(xi),\ ui = g(xi)$ los sumandos, entonces:

$\sum a = n \cdot a$	Suma de una constante "n" veces.
$\sum a \cdot vi = a \cdot \sum vi$	Propiedades de linealidad
$\sum (vi \pm ui) = \sum vi \pm \sum ui$	

Igualmente existen algunas identidades a tener en cuenta:

$f(xi)$	$\sum_{i=m}^{n} f(xi))$	$\sum_{i=1}^{n} f(xi) = \sum f(xi)$
$a =$ const	$(n-m+1)\cdot a$	$n\cdot a$
i	$1/2\cdot[(n^2+n)-(m^2-m)]$ $1/2\cdot[n\cdot(n+1)-m\cdot(m-1)]$	$1/2\cdot[n^2+n]$ $1/2\cdot[n\cdot(n+1)]$
i^2	$1/6\cdot[(2n^3+3n^2+n)-(2m^3-3m^2+m)]$ $1/6\cdot[(n\cdot(n+1)\cdot(2n+1))-m\cdot(m-1)\cdot(2m-1)]$	$1/6\cdot[2n^3+3n^2+n]$ $1/6\cdot[n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)]$
i^3	$1/4\cdot[(n^4+2n^3+n^2)-(m^4-2m^3+m^2)]$ $1/4\cdot[(n\cdot(n+1))^2-(m\cdot(m-1))^2]$	$=1/4\cdot[n^4+2n^3+n^2]$ $=1/4\cdot[n\cdot(n+1)]^2$
a^i *con* $a>0$ y $a\neq 1$	$\frac{a^{n+1}-a^m}{a-1}$	$\frac{a^{n+1}-a}{a-1}$
$\ln(i)$ $\log(i)$	Suma de logaritmos →	$\ln(n!)$ $\log(n!)$
$2i$	Suma de números pares →	$n^2+n=n\cdot(n+1)$
$2i-1$	Suma de números impares →	n^2