

# REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 16

En este capítulo se estudió la *cinética de cuerpos rígidos*, esto es, las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo y el movimiento que se produce. Salvo por las primeras dos secciones, las cuales se aplicaron al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido, el análisis se restringió al *movimiento plano de placas rígidas* y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia. El estudio del movimiento plano de cuerpos rígidos no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se considerará en el capítulo 18.

Se recordaron primero [sección 16.2] las dos ecuaciones fundamentales que se dedujeron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas y se observó que se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. La primera ecuación define el movimiento del centro de masa  $G$  del cuerpo; se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (16.1)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $\bar{\mathbf{a}}$  es la aceleración de  $G$ . La segunda se relaciona con el movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal; se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (16.2)$$

donde  $\dot{\mathbf{H}}_G$  es la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$  del cuerpo alrededor de su centro de masa  $G$ . Juntas, las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresan que *el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema compuesto por el vector  $m\bar{\mathbf{a}}$  en  $G$  y el par de momento  $\dot{\mathbf{H}}_G$*  (figura 16.19).

Restringiendo el análisis en este punto y para el resto del capítulo al movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia, se demostró [sección 16.3] que la cantidad de movimiento angular del cuerpo podría expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \quad (16.4)$$

donde  $\bar{I}$  es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje centroidal perpendicular al plano de referencia y  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular del cuerpo. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtuvo

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \quad (16.5)$$

que muestra que en el caso restringido que se consideró aquí, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido

Ecuaciones fundamentales de movimiento de un cuerpo rígido

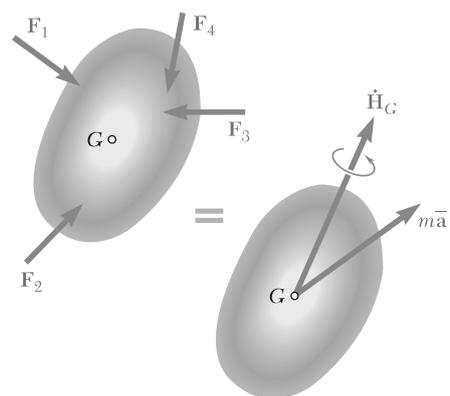


Figura 16.19

Cantidad de movimiento angular en movimiento plano

Ecuaciones para el movimiento plano de un cuerpo rígido

Principio de d'Alembert

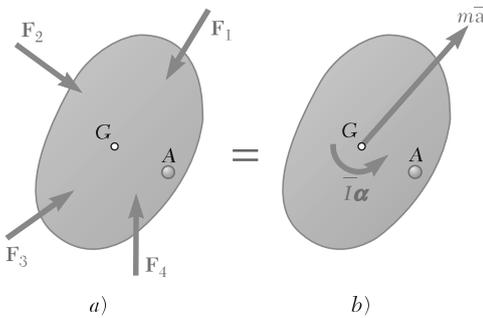


Figura 16.20

Ecuación de cuerpo libre de diagramas

Cuerpos rígidos conectados

Movimiento plano restringido

puede representarse mediante un vector de la misma dirección que  $\underline{\alpha}$  (esto es, perpendicular al plano de referencia) y con magnitud  $\bar{I}\alpha$ .

Se concluye de lo anterior [sección 16.4] que el movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia se define mediante las tres ecuaciones escalares

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad (16.6)$$

Se concluye además que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son realmente equivalentes a las fuerzas efectivas de las diversas partículas que forman el cuerpo*. Este enunciado, conocido como *principio de d'Alembert*, puede expresarse en la forma del diagrama vectorial que se muestra en la figura 16.20, donde las fuerzas efectivas se han representado mediante un vector  $m\bar{a}$  fijo en G y un par  $\bar{I}\alpha$ . En el caso particular de una placa en *traslación*, las fuerzas efectivas que se muestran en la parte b) de esta figura se reducen a un solo vector  $m\bar{a}$  en tanto que en el caso particular de una placa en *rotación centrodial*, se reducen a un solo par  $\bar{I}\alpha$ ; en otro caso de movimiento plano, tanto el vector  $m\bar{a}$  como el par  $\bar{I}\alpha$  deben incluirse.

Cualquier problema en el que intervenga el movimiento plano de una placa rígida se resuelve dibujando una *ecuación de diagramas de cuerpo libre* similar al de la figura 16.20 [sección 16.6]. Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento al igualar las componentes *x*, las componentes *y* y los momentos alrededor de un punto arbitrario A, de las fuerzas y vectores que participan [problemas resueltos 16.1, 16.2, 16.4 y 16.5]. Una solución alternativa se obtiene al agregar a las fuerzas externas un *vector de inercia*  $-m\bar{a}$  de sentido opuesto al de  $\bar{a}$ , fijo en G, y un *par de inercia*  $-\bar{I}\alpha$  de sentido opuesto al de  $\alpha$ . El sistema que se obtiene de este modo es equivalente a cero y se dice que la placa está en *equilibrio dinámico*.

El método que acaba de describirse se emplea también para resolver problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados [sección 16.7]. Se dibuja una ecuación de diagramas de cuerpo libre para cada parte del sistema, y las ecuaciones de movimiento obtenidas se resuelven de manera simultánea. Sin embargo, en algunos casos es posible dibujar un solo diagrama para todo el sistema, en el que se incluyan todas las fuerzas externas, así como los vectores  $m\bar{a}$  y los pares  $\bar{I}\alpha$  asociados con las diversas partes del sistema [problema resuelto 16.3].

En la segunda parte del capítulo se estudian cuerpos rígidos *que se mueven bajo restricciones determinadas* [sección 16.8]. Si bien el análisis cinético del movimiento plano restringido de una placa rígida es el mismo que antes, debe complementarse con un *análisis cinemático* que persigue expresar las componentes  $\bar{a}_x$  y  $\bar{a}_y$  de la aceleración del centro de masa G de la placa en términos de su aceleración angular  $\alpha$ . Los problemas que se resuelven de este modo incluyen la *rotación no centrodial* de barras y placas [problemas resueltos 16.6 y 16.7], el *movimiento de rodamiento* de esferas y ruedas [problemas resueltos 16.8 y 16.9], y el movimiento plano de *diversos tipos de varillajes* [problema resuelto 16.10].

# REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 17

En este capítulo se consideró de nuevo el método del trabajo y la energía y el método de impulso y la cantidad de movimiento. En la primera parte del capítulo se estudió el método del trabajo de la energía y su aplicación al análisis del movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos.

Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido

En la sección 17.2 se expresó primero el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en la forma

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  representan los valores inicial y final de la energía cinética del cuerpo rígido y  $U_{1 \rightarrow 2}$  representa el trabajo de las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo rígido.

Trabajo de una fuerza o un par

En la sección 17.3 se recordó la expresión que se encontró en el capítulo 13 para el trabajo de una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada en el punto  $A$ , a saber

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (17.3')$$

donde  $F$  fue la magnitud de la fuerza,  $\alpha$  el ángulo que forma con la dirección del movimiento de  $A$ , y  $s$  la variable de integración que mide la distancia recorrida por  $A$  a lo largo de su trayectoria. También se derivó la expresión para el *trabajo de un par de momento*  $\mathbf{M}$  aplicado a un cuerpo rígido durante una rotación  $\theta$  del cuerpo rígido:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (17.5)$$

Energía cinética en movimiento plano

Después se obtuvo una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano [sección 17.4]. Se escribió

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (17.9)$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad del centro de masa  $G$  del cuerpo,  $\omega$  es la velocidad angular del cuerpo e  $\bar{I}$  es su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por  $G$  perpendicular al plano de referencia (figura 17.13) [problema resuelto 17.3]. Se señaló que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano puede separarse en dos partes: 1) la energía cinética  $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$  asociada con el movimiento del centro de masa  $G$  del cuerpo, y 2) la energía cinética  $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$  asociada con la rotación del cuerpo en torno a  $G$ .

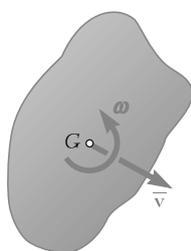


Figura 17.13

Para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por  $O$  con una velocidad angular  $\omega$  se tuvo

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (17.10)$$

donde  $I_O$  fue el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje fijo. Se observó que el resultado que se obtuvo no se limita a la rotación de placas planas o de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, aunque es válida independientemente de la forma del cuerpo o de la ubicación del eje de rotación.

La ecuación (17.1) puede aplicarse al movimiento de sistemas de cuerpos rígidos [sección 17.5] siempre que todas las fuerzas que actúan sobre los diversos cuerpos participantes —internas así como externas al sistema— se incluyan en el cálculo de  $U_{1 \rightarrow 2}$ . Sin embargo, en el caso de sistemas compuestos por elementos conectados por pasadores o bloques y poleas conectadas mediante cuerdas inextensibles o engranes dentados, los puntos de aplicación de las fuerzas internas se mueven distancias iguales y el trabajo de estas fuerzas se cancela [problemas resueltos 17.1 y 17.2].

Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo de energía puede expresarse en la forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (17.12)$$

que se conoce como el principio de la *conservación de la energía* [sección 17.6]. Es posible utilizar este principio para resolver problemas que implican fuerzas conservativas como la fuerza de la gravedad o la que ejerce un resorte [problemas resueltos 17.4 y 17.5]. Sin embargo, cuando se va a determinar una reacción, el principio de la conservación de la energía debe complementarse mediante la aplicación del principio de d'Alembert [problema resuelto 17.4].

En la sección 17.7 se amplió el concepto de potencia a un cuerpo que gira y que está sujeto a un par; se escribió

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega \quad (17.13)$$

donde  $M$  es la magnitud del par y  $\omega$  la velocidad angular del cuerpo.

La parte media del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento, y a su aplicación en la solución de diversos tipos de problemas que incluyen el movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia.

Se recordó primero el principio del *impulso y la cantidad de movimiento* en la forma en que se dedujo en la sección 14.9 para un sistema de partículas y se aplicó al *movimiento de cuerpo rígido* [sección 17.8]. Se escribió

$$\mathbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \mathbf{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{Cant. Mov. Sist.}_2 \quad (17.14)$$

## Energía cinética en rotación

## Sistemas de cuerpos rígidos

## Conservación de la energía

## Potencia

## Principio del impulso y la cantidad de movimiento para un cuerpo rígido

A continuación se demostró que para una placa rígida o un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman el cuerpo es equivalente a un vector  $m\bar{v}$  conectado con su punto de aplicación en el centro de masa  $G$  del cuerpo y un par  $I\bar{\omega}$  (figura 17.14). El vector

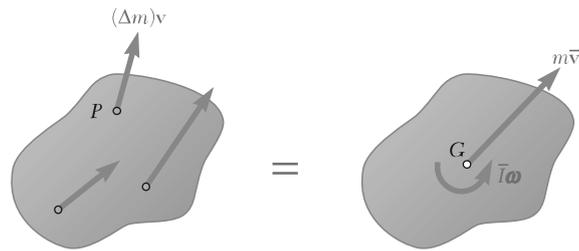


Figura 17.14

$m\bar{v}$  se asocia con la traslación del cuerpo con  $G$  y representa la *cantidad de movimiento lineal* del cuerpo, en tanto que el par  $I\bar{\omega}$  corresponde a la rotación del cuerpo alrededor de  $G$  y representa la *cantidad de movimiento angular* del cuerpo alrededor de un eje que pasa por  $G$ .

La ecuación (17.14) puede expresarse en forma gráfica como se muestra en la figura 17.15 dibujando tres diagramas que representen, respectivamente, al sistema de las cantidades de movimiento iniciales del cuerpo, los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y el sistema de las cantidades de movimiento finales del cuerpo.

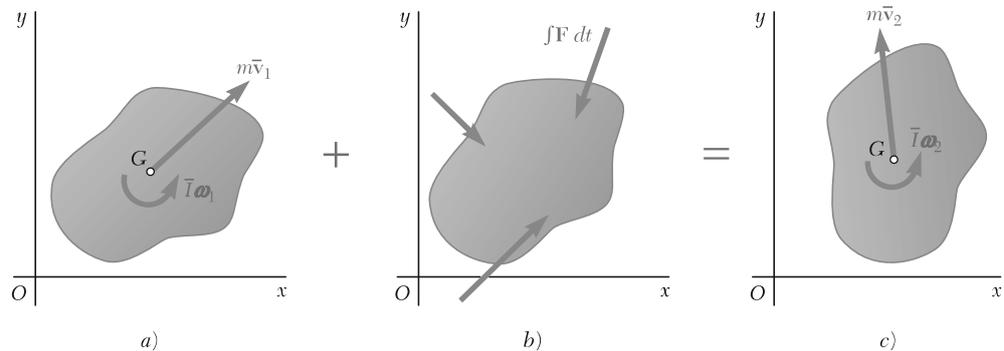


Figura 17.15

Al sumar e igualar de manera respectiva las *componentes x*, las *componentes y* y los *momentos alrededor de cualquier punto dado* de los vectores que se indican en la figura, se obtienen tres ecuaciones de movimiento que pueden resolverse respecto a las incógnitas deseadas [problemas resueltos 17.6 y 17.7].

En problemas que tienen que ver con varios cuerpos rígidos conectados [sección 17.9], cada cuerpo puede considerarse de manera separada [problema resuelto 17.6], o, si no intervienen más de tres incógnitas, es posible aplicar el principio del impulso y la can-

cantidad de movimiento al sistema completo, considerando sólo los impulsos de las fuerzas externas [problema resuelto 17.8].

Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos pasa por un punto  $O$ , se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de  $O$  [sección 17.10]. Se sugirió que los problemas que implican la conservación de la cantidad de movimiento angular se resuelvan con el método general que se describió antes [problema resuelto 17.8].

La última parte del capítulo se dedicó al *movimiento impulsivo* y al *impacto excéntrico* de cuerpos rígidos. De la sección 17.11 se recordó que el método del impulso de la cantidad de movimiento es el único método práctico para la solución de problemas que implican el movimiento impulsivo, y que el cálculo de impulso en tales problemas es en particular simple [problema resuelto 17.9].

En la sección 17.12 se recordó que el impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se define como un impacto en el cual los centros de masa de los cuerpos que chocan *no* se localizan sobre la línea de impacto. Se demostró que en una situación de este tipo se sigue cumpliendo una relación similar a la que se dedujo en el capítulo 13 para el impacto central de dos partículas y en la que interviene el coeficiente de restitución  $e$ , pero que *se deben usar las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$  donde ocurre el contacto durante el impacto*. En consecuencia

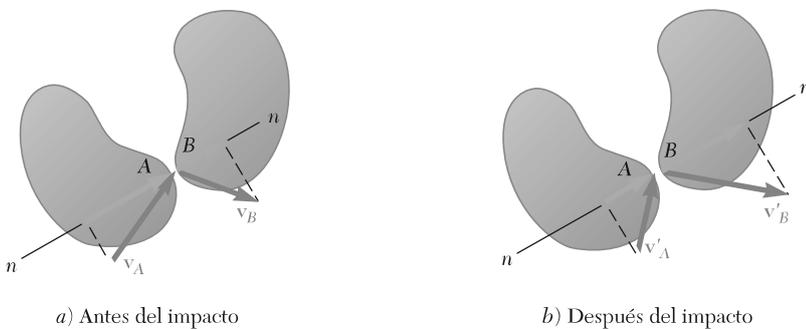
$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (17.19)$$

donde  $(v_A)_n$  y  $(v_B)_n$  son las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades de  $A$  y  $B$  antes del impacto, y  $(v'_A)_n$  y  $(v'_B)_n$  son sus componentes después del impacto (figura 17.16). La

Conservación de la cantidad de movimiento angular

Movimiento impulsivo

Impacto excéntrico



**Figura 17.16**

ecuación (17.19) es aplicable no sólo cuando los cuerpos que chocan se mueven con libertad después del impacto, sino también cuando están parcialmente restringidos en su movimiento. Debe usarse junto con una o varias ecuaciones obtenidas al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento [problema resuelto 17.10]. También se consideró un problema donde es posible combinar el método del impulso y la cantidad de movimiento, y el método de trabajo y la energía [problema resuelto 17.11].