REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 15

Este capítulo se dedicó al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos.

Cuerpo rígido en traslación

Primero se consideró la *traslación* de un cuerpo rígido [sección 15.2] y se observó que en un movimiento de este tipo, *todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado.*

Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo

Después se consideró la *rotación* de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [sección 15.3]. La posición del cuerpo se definió mediante el ángulo θ que la línea BP dibujaba desde el eje de rotación hasta el punto P del cuerpo, formado con un plano fijo (figura 15.39). Se encontró que la magnitud de la velocidad de P es

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \text{ sen } \phi \qquad (15.4)$$

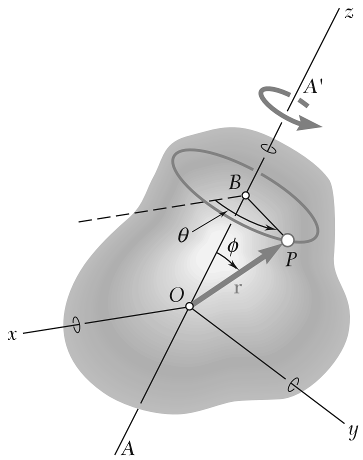

Figura 15.39

donde $\dot{\theta}$ es la derivada respecto al tiempo de θ. Luego se expresó la velocidad de P como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (15.5)$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.6)$$

se dirige a lo largo del eje de rotación fijo y representa la *velocidad angular* del cuerpo.

Si se denota por $\boldsymbol{\alpha}$ la derivada $d\boldsymbol{\omega}/dt$ de la velocidad angular, la aceleración de P se expresa como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (15.8)$$

Al diferenciar (15.6) y recordar que $\mathbf{k}$ es una constante en magnitud y dirección, se encuentra que

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.9)$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}$ representa la *aceleración angular* del cuerpo y está dirigida a lo largo del eje de rotación fijo.

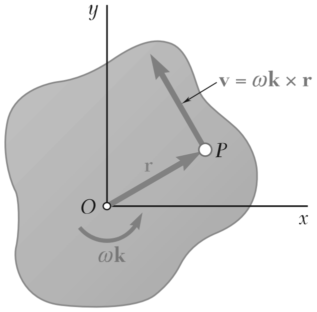

Figura 15.40

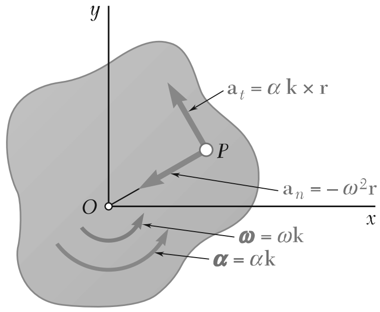

Figura 15.41

Rotación de una placa representativa

Después se consideró el movimiento de una placa representativa ubicada en un plano perpendicular al eje de rotación del cuerpo (figura 15.40). Puesto que la velocidad angular es perpendicular a la placa, la velocidad de un punto P de la placa se expresó como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

Componentes tangencial y normal

donde $\mathbf{v}$ está contenida en el plano de la placa. Al sustituir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ en (15.8), se encontró que la aceleración de P podía descomponerse en las componentes tangencial y normal (figura 15.41) iguales respectivamente a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11$'$}$$

Velocidad angular y aceleración angular de la placa en rotación

Al recordar las ecuaciones (15.6) y (15.9), se obtuvieron las siguientes expresiones para la *velocidad angular* y la *aceleración angular* de la placa [sección 15.4]:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

o

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Estas expresiones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula.

Dos casos particulares de rotación se encontraron con frecuencia: *rotación uniforme* y *rotación uniformemente acelerada.* Los problemas en los que interviene cualquiera de estos movimientos se pueden resolver utilizando ecuaciones similares a las que se emplearon en las secciones 11.4 y 11.5 para el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula, pero donde x, v y a se sustituyen por θ, ω y α, respectivamente [problema resuelto 15.1].

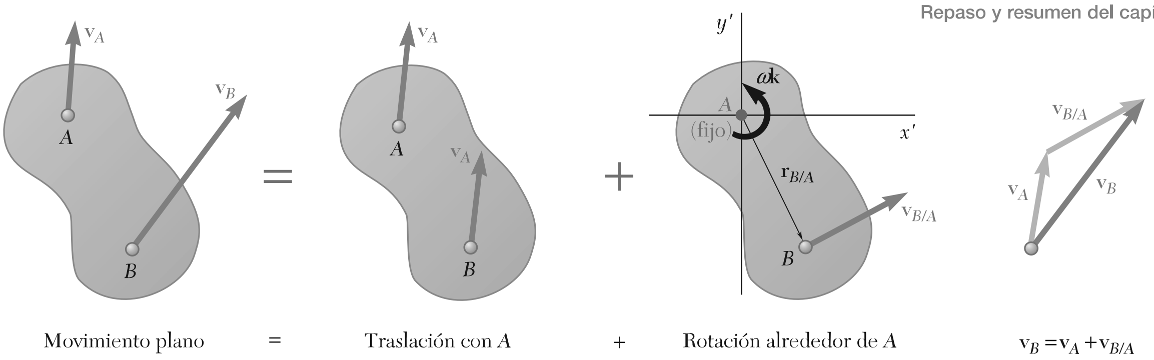

Figura 15.42

Velocidades en movimiento plano

El *movimiento plano más general* de una placa rígida puede considerarse como la *suma de una traslación y una rotación* [sección 15.5]. Por ejemplo, es posible suponer que la placa que se muestra en la figura 15.42 se traslada con el punto A, mientras gira de manera simultánea alrededor de A. Se concluye [sección 15.6] que la velocidad de cualquier punto B de la placa puede expresarse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

donde $\mathbf{v}_A$ es la velocidad de A y $\mathbf{v}_{B/A}$ la velocidad relativa de B con respecto a A o, de manera más precisa, con respecto a los ejes $x'y'$ que se trasladan con A. Denotando mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se encontró que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \tag{15.18}$$

La ecuación fundamental (15.17) que relaciona las velocidades absolutas de los puntos A y B y la velocidad relativa de B con respecto a A se expresó en la forma de un diagrama vectorial y se utilizó para resolver problemas que implican el movimiento de diversos tipos de mecanismos [problemas resueltos 15.2 y 15.3].

Centro instantáneo de rotación

Otro planteamiento para la solución de problemas en los que intervienen las velocidades de los puntos de una placa rígida en un movimiento plano se presentó en la sección 15.7 y se usó en los problemas resueltos 15.4 y 15.5. Está basado en la determinación del *centro instantáneo de rotación C* de la placa (figura 15.43).

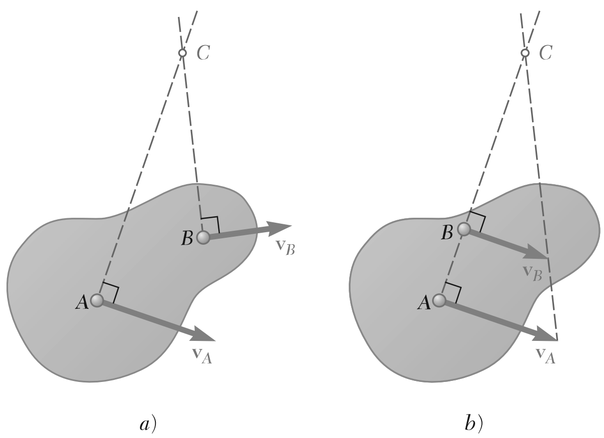

Figura 15.43

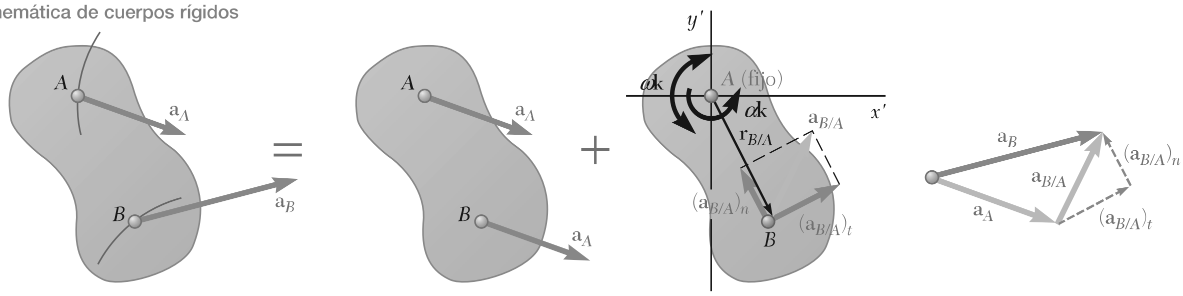

Figura 15.44

Aceleraciones en movimiento plano

El hecho de que sea posible considerar a cualquier movimiento plano de una placa rígida como la suma de una traslación de la placa con un punto de referencia A y una rotación alrededor de A se utilizó en la sección 15.8 para relacionar las aceleraciones absolutas de cualesquiera dos puntos A y B de la placa y la aceleración relativa de B con respecto a A. Se tuvo

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.21}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ consistió en una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ de magnitud $r\omega^2$ dirigida hacia A, y una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ de magnitud $r\alpha$ perpendicular a la línea AB [figura 15.44]. La relación fundamental (15.21) se expresó en términos de diagramas vectoriales o ecuaciones vectoriales y se empleó para determinar las aceleraciones de puntos determinados de diversos mecanismos [problemas resueltos 15.6 a 15.8]. Debe señalarse que el centro de rotación instantáneo C que se consideró en la sección 15.7 no puede utilizarse para determinar aceleraciones, puesto que el punto C, en general, *no* tiene aceleración cero.

Coordenadas expresadas en términos de un parámetro

En el caso de ciertos mecanismos, es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un *solo parámetro*. Las componentes de la velocidad absoluta y la aceleración de un punto dado se obtienen entonces al diferenciar dos veces con respecto al tiempo t las coordenadas x y y de ese punto [sección 15.9].