MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

B.1. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considérese una pequeña masa Δm montada sobre una barra de masa insignificante que puede girar libremente alrededor de un eje AA' (figura B.1*a*). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, supuestas inicialmente en reposo, empezarán a girar alrededor de AA'. Los detalles de este movimiento se estudian después en dinámica. Por ahora sólo se quiere indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación determinada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por lo tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que el sistema ofrece cuando se intenta ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2\,\Delta m$ recibe el nombre de *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA'.

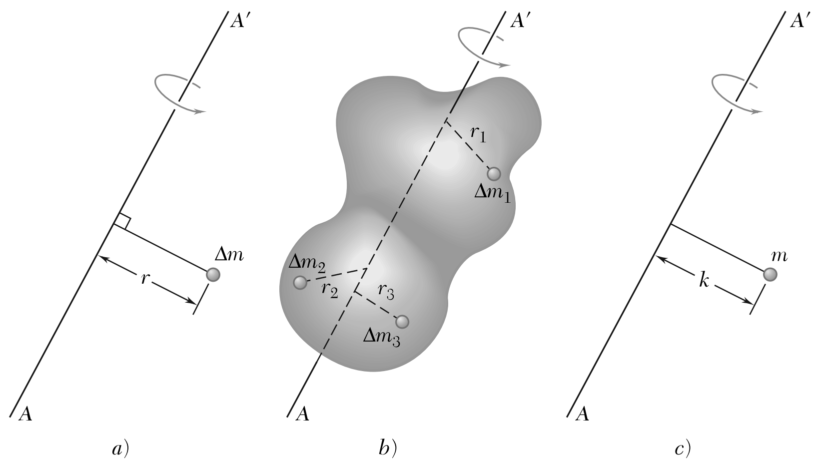


Figura B.1

Considérese ahora un cuerpo de masa m que girará alrededor de un eje AA' (figura B.1*b*). Al dividir el cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., se encuentra que la resistencia del cuerpo que se va a girar se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA'. Al aumentar el número de elementos, se encuentra que el momento de inercia es igual, en el límite, a la integral

$$I = \int r^2\,dm \tag{B.1}$$

El *radio de giro k* del cuerpo con respecto al eje AA' se define mediante la relación

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{B.2}$$

El radio de giro k representa, en consecuencia, la distancia a la cual la masa completa del cuerpo debe concentrarse si el momento de inercia con respecto a AA' va a permanecer sin cambio (figura B.1*c*). Ya sea que conserve su forma original (figura B.1*b*) o si se concentra como se muestra en la figura B.1*c*, la masa m reaccionará de la misma manera a una rotación, o *giro*, alrededor de AA'.

Si se utilizan unidades del SI, el radio de giro k se expresa en metros y la masa m en kilogramos y, por ello, la unidad que se emplea para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs (esto es, $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$) y, por ello, la unidad derivada que se utiliza para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.†

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje de coordenadas puede expresarse con facilidad en términos de las coordenadas x, y y z del elemento de masa dm (figura B.2). Al advertir, por ejemplo, que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

Es posible obtener expresiones similares para los momentos de inercia con respecto a los ejes x y z. Se escribe

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \tag{B.3}$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

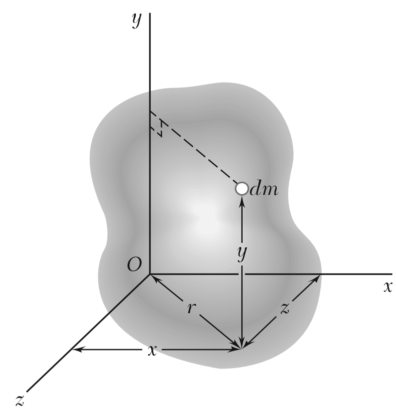


Figura B.2


Fotografía B.1 Como estudiará en su curso de dinámica, el comportamiento rotacional del cigüeñal que se muestra depende de su momento de inercia de masa con respecto a su eje de rotación.

†Debe tenerse presente cuando se convierte el momento de inercia de una masa de unidades de uso común en Estados Unidos a unidades del SI que la unidad fundamental *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y debe, por lo tanto, convertirse en newtons. Se tiene

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45\ \text{N})(0.3048\ \text{m})(1\ \text{s})^2 = 1.356\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, puesto que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$,

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

B.2. TEOREMA DE EJES PARALELOS

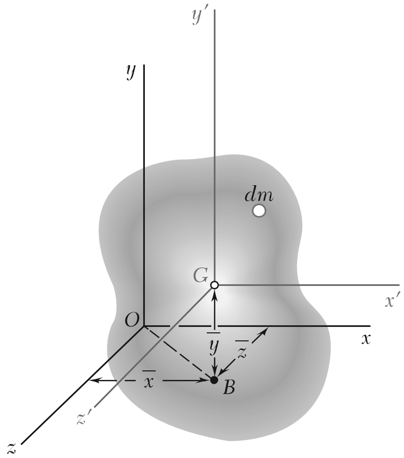


Figura B.3

Considérese un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está en el punto arbitrario O, y $Gx'y'z'$ un sistema de *ejes centroidales* paralelos, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo† y cuyos ejes x', y' y z' son paralelos a los ejes x, y y z, respectivamente (figura B.3). Denotando con $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y y z de elemento dm con respecto a $Oxyz$ y sus coordenadas x', y' y z' con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \overline{x} \qquad y = y' + \overline{y} \qquad z = z' + \overline{z} \tag{B.4}$$

Con referencia a las ecuaciones (B.3), es posible expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \overline{y})^2 + (z' + \overline{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\overline{y} \int y'\, dm + 2\overline{z} \int z'\, dm + (\overline{y}^2 + \overline{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en esta expresión representa el momento de inercia $I_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x'; la segunda y tercera integrales representan el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, respectivamente, y, puesto que ambos planos contienen G, las dos integrales son *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por lo tanto, se escribe,

$$I_x = \overline{I}_{x'} + m(\overline{y}^2 + \overline{z}^2) \tag{B.5}$$

y, de manera similar,

$$I_y = \overline{I}_{y'} + m(\overline{z}^2 + \overline{x}^2) \qquad I_z = \overline{I}_{z'} + m(\overline{x}^2 + \overline{y}^2) \tag{B.5$'$}$$

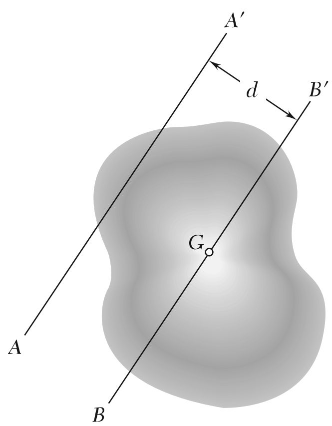


Figura B.4

De la figura B.3 se ve fácilmente que la suma $\overline{z}^2 + \overline{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB, entre los ejes y y y'. De manera similar, $\overline{y}^2 + \overline{z}^2$ y $\overline{x}^2 + \overline{y}^2$ representan los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y los ejes z y z', respectivamente. Al denotar por d la distancia entre un eje arbitrario AA' y el eje centroidal paralelo BB' (figura B.4), se puede, en consecuencia, escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\overline{I}$ con respecto a BB':

$$I = \overline{I} + md^2 \tag{B.6}$$

Al expresar los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \overline{k}^2 + d^2 \tag{B.7}$$

donde k y $\overline{k}$ representan los radios de giro del cuerpo alrededor de AA' y BB', respectivamente.

†Observe que el término *centroidal* se usa aquí para definir el centro de gravedad G del cuerpo, aunque G no coincida con el centroide del volumen del cuerpo.

B.3. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

Considere una placa delgada de espesor uniforme t, hecha de un material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' *contenido en el plano* de la placa (figura B.5*a*) es

$$I_{AA',\text{ masa}} = \int r^2\, dm$$

Puesto que $dm = \rho t\, dA$, se escribe

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Pero r representa la distancia del elemento de área dA al eje AA'; la

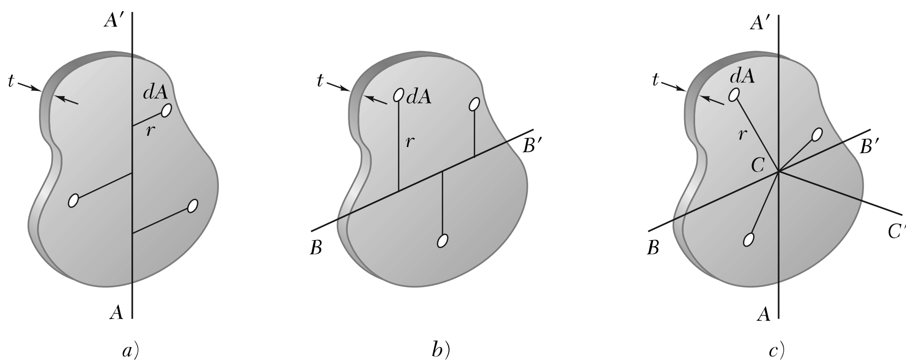


Figura B.5

integral por lo tanto es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA'. Se tiene

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} \tag{B.8}$$

De manera similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y es perpendicular a AA' (figura B.5*b*), se tiene

$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} \tag{B.9}$$

Si se considera ahora el eje CC' que es *perpendicular* a la placa y pasa por el punto de intersección C de AA' y BB' (figura B.5*c*), se escribe

$$I_{CC',\text{ masa}} = \rho t J_{C,\text{ área}} \tag{B.10}$$

donde J_C es el momento *polar* de inercia del área de la placa con respecto al punto C.

Al recordar la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre los momentos polar y rectangular de inercia de un área, se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{B.11}$$

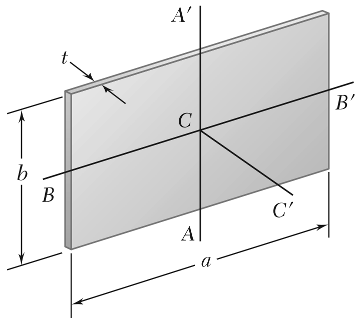


Figura B.6

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura B.6), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a los ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3b)$$
$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Al observar que el producto ρabt es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada del modo siguiente:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{B.12}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{B.13}$$

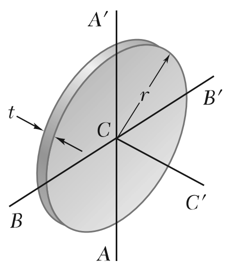


Figura B.7

Placa circular. En el caso de una placa circular, o disco, de radio r (figura B.7), se escribe

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

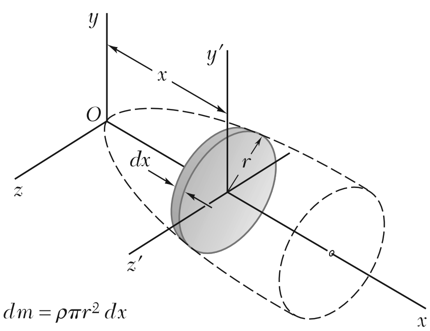
Al observar que el producto $\rho\pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la manera siguiente:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{B.14}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{B.15}$$

B.4. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL MEDIANTE INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2\,dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ, el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho\int r^2\,dV$. Esta integral depende sólo de la forma del cuerpo. De tal modo, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional, por lo general es necesario efectuar una integración triple, o al menos doble.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración al elegir como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. En el caso de cuerpos de revolución, por ejemplo, el elemento de masa sería un disco delgado (figura B.8). Utilizando la fórmula (B.15), el momento de inercia con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura B.8. Su momento de inercia con respecto a cada uno de los otros dos ejes de coordenadas se obtiene utilizando la fórmula (B.14) y el teorema de ejes paralelos. La integración de la expresión obtenida produce el momento de inercia deseado del cuerpo.



$$dm = \rho\pi r^2\,dx$$
$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$$

Figura B.8 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

B.5. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

Los momentos de inercia de unas cuantas formas comunes se muestran en la figura B.9. Para un cuerpo consistente en varias de estas formas simples, el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje dado puede obtenerse calculando primero los momentos de inercia de sus partes componentes alrededor del eje deseado y después sumándolos en conjunto. Como sucedió con las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no puede* obtenerse sumando los radios de giro de sus partes componentes.

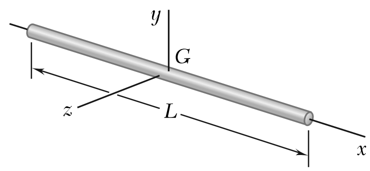
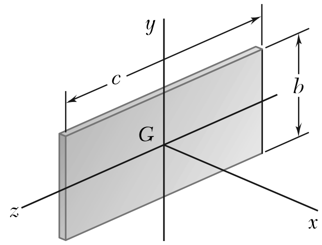
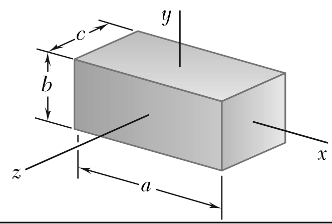
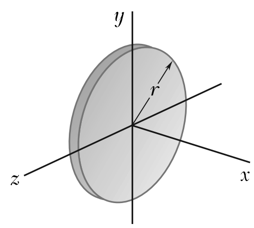
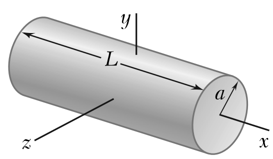
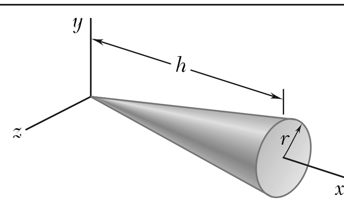
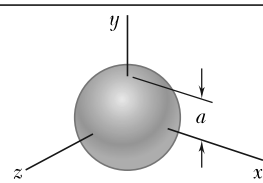
Barra ligera		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Figura B.9 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.

Problemas

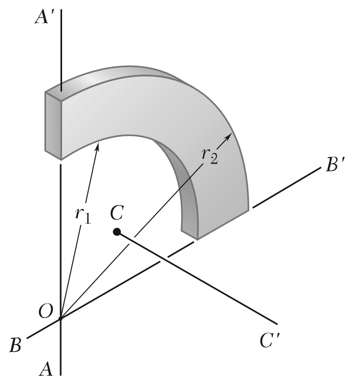


Figura PB.1

B.1 En la figura se muestra un cuarto de anillo con masa m que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si $r_1 = \frac{1}{2}r_2$, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje AA' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

B.2 En la figura se muestra una placa delgada y semielíptica con una masa m. Determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal BB' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

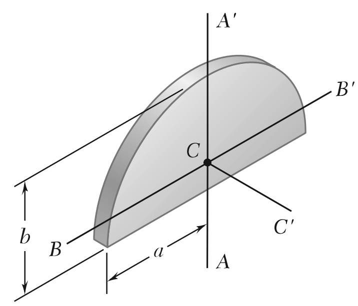


Figura PB.2

B.3 En la figura se muestra un anillo elíptico que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del anillo se denota con m, determine su momento de inercia con respecto a *a*) el eje centroidal BB' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

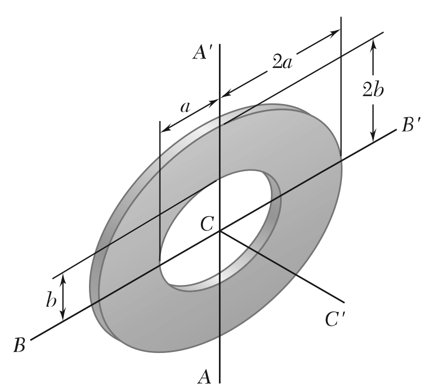


Figura *PB.3*

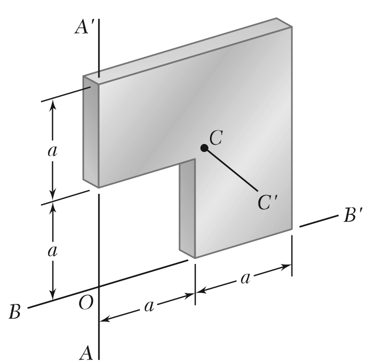


Figura PB.4

B.4 En la figura se muestra un componente de máquina que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del componente se denota con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje BB' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al componente.

B.5 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y.

B.6 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Si los ejes AA' y BB' son paralelos al eje z y descansan en un plano paralelo al plano zx y además se encuentran a una distancia a sobre éste, determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a *a*) el eje AA', *b*) el eje BB'.

B.7 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje x y *b*) el eje y.

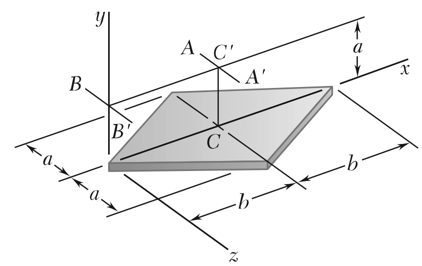


Figura PB.5 y *PB.6*

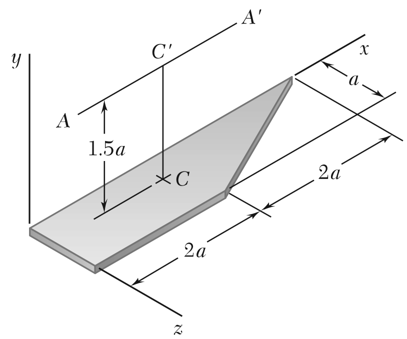


Figura PB.7 y PB.8

B.8 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa y *b*) el eje AA' que es paralelo al eje x y se encuentra a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

B.9 Al rotar la enjuta parabólica mostrada con respecto al eje x se forma un sólido homogéneo de revolución con masa m. Utilice integración directa para expresar, en términos de m y b, el momento de inercia del sólido con respecto al eje x.

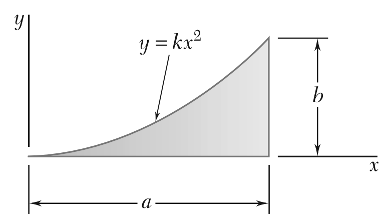


Figura PB.9

B.10 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje z del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m.

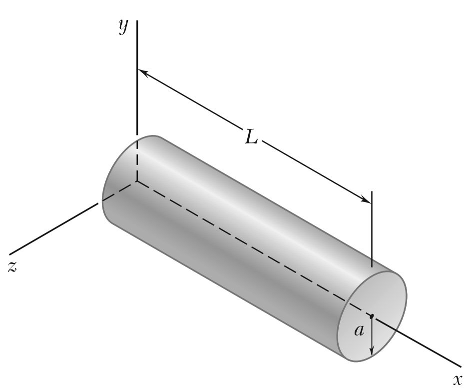


Figura *PB.10*

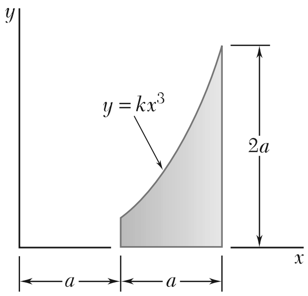


Figura PB.11

B.11 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m. Determine por integración directa el momento de masa de inercia del sólido con respecto a a) el eje x y b) el eje y. Exprese las respuestas en términos de m y a.

B.12 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje x.

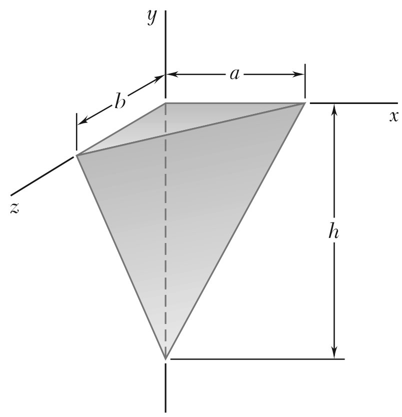


Figura PB.12 y *PB.13*

B.13 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y.

***B.14** Suponga que el semielipsoide mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z.

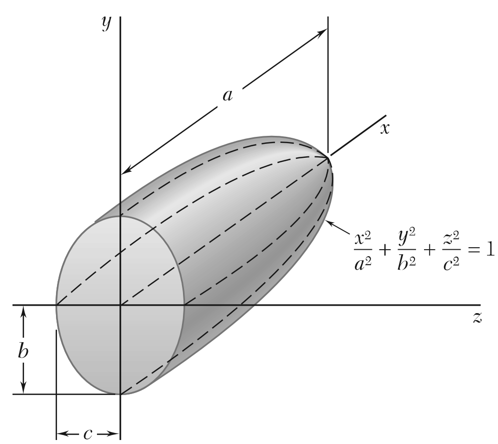


Figura PB.14

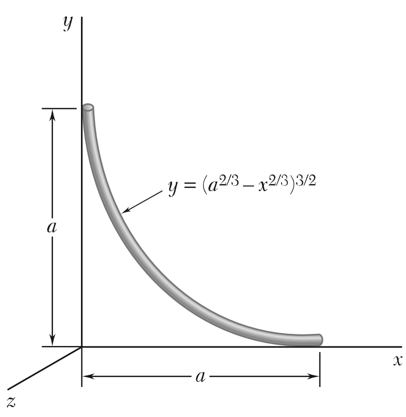


Figura PB.15

***B.15** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.