Momento de Inercia (formulario básico)

El **momento de inercia** (***I***) refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro, y es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo.

Si $\vec{L}$ es el **momentum angular** que tiene un cuerpo (o de un sistema de partículas) y $\vec{\omega}$ la **velocidad angular** con la que rota alrededor de un eje fijo, entonces:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

De igual forma si se aplica un **torque o momento** ($\vec{\tau}$) sobre un objeto, la **aceleración angular** ($\vec{\alpha}$) que experimenta el cuerpo alrededor de un eje fijo viene dada por:

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$$

El **momento de inercia** para un sistema de partículas discretas alrededor del un eje de rotación fijo viene dado por:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^{\,2} = \left(\sum m_i\right) \cdot k^2 = M \cdot k^2$$

Donde: "$\boldsymbol{m_i}$ " son cada una de las masas individuales presente en el sistema, "$\boldsymbol{r_i}$" la distancia de cada masa al eje de rotación respectivo, "***M***" la suma de todas las masas del sistema y "***k***" es el radio de giro del cuerpo.

En caso de cuerpos continuos tenemos que la expresión queda:

$$I = \sum \Delta m_i \cdot r_i^{\,2} \Rightarrow \int r^2 \cdot dm = M \cdot k^2$$

En cuerpos continuos los elementos de masas los podemos vincular al concepto de densidad y estos dependen si hablamos de densidades lineales, superficiales o volumétricas:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dL \quad (densidad\ \ lineal)$$

$$\sigma = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \sigma \cdot dL \quad (densidad\ \text{superficial})$$

$$\rho = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \rho \cdot dL \quad (densidad\ \ volumétrica\ )$$

Para efectos de este curso nos limitaremos únicamente a momentos de inercia en superficies planas, estas ubicadas en el plano XY, y el eje Z que sale de la superficie. Para estos casos resulta que los momentos de inercia respecto a esos tres ejes respectivos son:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \iint y^2 \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = (\sigma \cdot A) \cdot k^2 = M \cdot k^2$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \iint x^2 \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = (\sigma \cdot A) \cdot k^2 = M \cdot k^2$$

$$\ldots$$

$$I_z = \int r^2 \cdot dm = \iint (x^2 + y^2) \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = I_x + I_y = (\sigma \cdot A) \cdot k^2 = M \cdot k^2$$

$$\ldots$$

$$I_z = \int r^2 \cdot dm = \iint r^2 \cdot \sigma \cdot (r \cdot dr \cdot d\theta) = (\sigma \cdot A) \cdot k^2 = M \cdot k^2 \quad (en\ \ coordenadas\ \ polares)$$

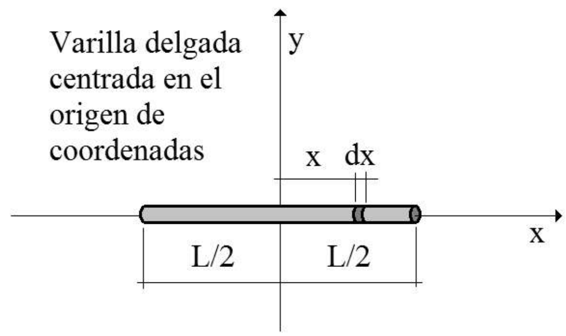
Teorema de Steiner o Teorema de los Ejes Paralelos

El teorema de Steiner (*denominado en honor de Jakob Steiner*) o Teorema de los Ejes Paralelos establece que el momento de inercia (***I***) con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de masa, es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa (***I_{cm}***) más el producto de la masa (***M***) por el cuadrado de la distancia (***d***) entre los dos ejes:

$$\boxed{I = I_{cm} + M \cdot d^2}$$

Ejemplo #1

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Este es un caso lineal, aquí resulta que la masa total es:

$$dm = \lambda \cdot dx \rightarrow \int dm = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda \cdot dx \rightarrow$$

$$M = \lambda \cdot [L/2 - (-L/2)] = \lambda \cdot L$$

Aplicando las expresiones respectivas tenemos:

$$Icm_x = \int y^2 \cdot dm = 0$$

esto ocurre porque el "y" de cada elemento de masa (*dm*) vale "0" por estar sobre el mismo eje X

$$Icm_y = \int x^2 \cdot dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot (\lambda \cdot dx) = \lambda \cdot \left[\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right]$$

$$Icm_y = \lambda \cdot \left[\frac{L^3}{12} \right] = (\lambda \cdot L) \cdot \frac{L^2}{12} = M \cdot \frac{L^2}{12}$$

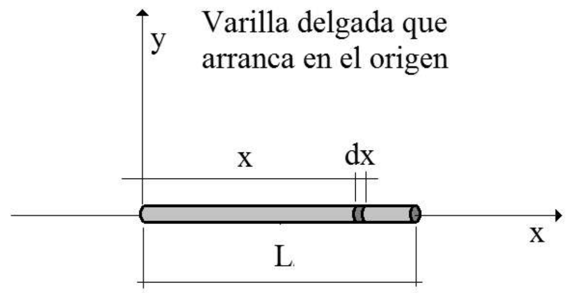
Y finalmente:

$$I_z = I_x + I_y = 0 + M \cdot \frac{L^2}{12} = M \cdot \frac{L^2}{12} \Rightarrow k_z = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

Este caso se corresponde al momento de Inercia en el centroide de la varilla, ya que el origen de coordenadas es el mismo que el centroide la figura.

Ejemplo #2

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Este nuevamente el caso lineal, donde la masa total es:

$$dm = \lambda \cdot dx \rightarrow \int dm = \int_0^L \lambda \cdot dx \rightarrow$$

$$M = \lambda \cdot [L - 0] = \lambda \cdot L$$

Aplicando las expresiones respectivas tenemos:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = 0$$

esto ocurre porque el "y" de cada elemento de masa (*dm*) vale "0" por estar sobre el mismo eje X

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int_0^L x^2 \cdot (\lambda \cdot dx) = \lambda \cdot \left[\frac{L^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right]$$

$$I_y = \lambda \cdot \frac{L^3}{3} = (\lambda \cdot L) \cdot \frac{L^2}{3} = M \cdot \frac{L^2}{3}$$

Y finalmente:

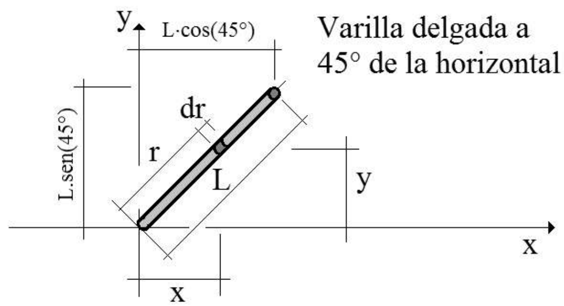
$$I_z = I_x + I_y = 0 + M \cdot \frac{L^2}{3} = M \cdot \frac{L^2}{3} \Rightarrow k_z = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Aquí podemos demostrar el teorema de los ejes paralelos; en este caso:

$$I_z = Icm_z + M \cdot d^2 = \left[\frac{M \cdot L^2}{12} \right] + \left[M \cdot \left[\frac{L}{2} \right]^2 \right] = M \cdot \frac{L^2}{3}$$

Ejemplo #3

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Este nuevamente el caso lineal, donde la masa total es:

$$dm = \lambda \cdot dr \rightarrow \int dm = \int_{0}^{L} \lambda \cdot dr \rightarrow$$

$$M = \lambda \cdot [L - 0] = \lambda \cdot L$$

Aplicando las expresiones respectivas tenemos:

$$I_x = \int_{0}^{L \cdot sen(45^o)} y^2 \cdot dm = \int_{0}^{L \cdot sen(45^o)} y^2 \cdot (\lambda \cdot dr)$$

$$pero\ :\ dy = dr \cdot sen(45^o) \rightarrow$$

$$I_x = \left[\frac{\lambda}{sen(45^o)}\right] \cdot \left[\int_{0}^{L \cdot sen(45^o)} y^2 \cdot dy\right] = \frac{\lambda}{sen(45^o)} \cdot \left[\frac{(L \cdot sen(45^o))^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$I_x = \lambda \cdot L \cdot \frac{L^2 \cdot sen^2(45^o)}{3} = M \cdot \frac{L^2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{M \cdot L^2}{6}$$

Similar ocurre con el momento de inercia respecto al eje Y

$$I_y = \int_{0}^{L \cdot \cos(45^o)} x^2 \cdot dm = \int_{0}^{L \cdot \cos(45^o)} x^2 \cdot (\lambda \cdot dr)$$

$$pero\ :\ dx = dr \cdot \cos(45^o) \rightarrow$$

$$I_y = \left[\frac{\lambda}{\cos(45^o)}\right] \cdot \left[\int_{0}^{L \cdot \cos(45^o)} y^2 \cdot dy\right] = \frac{\lambda}{\cos(45^o)} \cdot \left[\frac{(L \cdot \cos(45^o))^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$I_y = \lambda \cdot L \cdot \frac{L^2 \cdot \cos^2(45^o)}{3} = M \cdot \frac{L^2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{M \cdot L^2}{6}$$

$$I_z = \int_0^L r^2 \cdot dm = \int_0^L r^2 \cdot (\lambda \cdot dr) = \lambda \cdot \left[\frac{L^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] \rightarrow$$

$$I_z = \lambda \cdot L \cdot \frac{L^2}{3} = M \cdot \frac{L^2}{3} \Rightarrow k = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

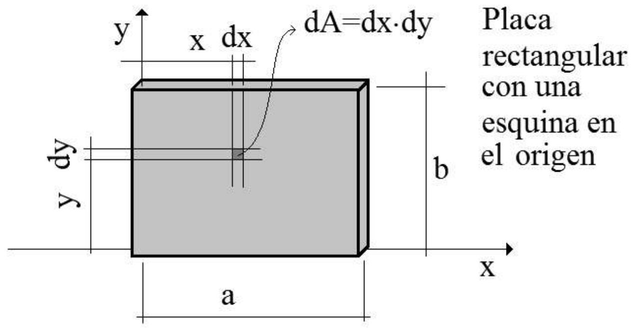
Y se puede probar igualmente que:

$$I_z = I_x + I_y = M \cdot \frac{L^2}{6} + M \cdot \frac{L^2}{6} = M \cdot \frac{L^2}{3}$$

Y que debe se igual para todo I_z en una varilla recta en el plano XY de longitud 'L' con uno de sus extremos en el origen de coordenadas.

Ejemplo #4

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Este es un caso superficial la masa total es la densidad de la superficie por el área de la figura. Dado que el área de un rectángulo es base por altura, entonces:

$$M = \sigma \cdot Area = \sigma \cdot (a \cdot b)$$

Muchas veces se requiere hallar el área por integración, y es importante tener claros los límites de integración y se resuelven como si se trata de llaves, primero el más interno y luego el externo, en este caso integramos del 'dA' primero en el eje 'x', desde '0' hasta 'a', y luego el eje 'y', aquí desde '0' hasta 'b'. En ese caso sería:

$$dm = \sigma \cdot dA \rightarrow M = \sigma \cdot \int_0^b \int_0^a dx \cdot dy \rightarrow$$

$$M = \sigma \cdot \int_0^b [a - 0] \cdot dy = \sigma \cdot a \cdot \int_0^b dy = \sigma \cdot a \cdot [b - 0]$$

$$M = \sigma \cdot (a \cdot b)$$

Ahora aplicando las expresiones respectivas de los momentos de inercia resulta:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \int y^2 \cdot (\sigma \cdot dA) = \sigma \int_0^b \int_0^a y^2 \cdot dx \cdot dy \Rightarrow$$

$$I_x = \sigma \int_0^b y^2 \cdot [a - 0] \cdot dy = \sigma \cdot a \int_0^b y^2 \cdot dy \Rightarrow$$

$$I_x = \sigma \cdot a \cdot \left[\frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \sigma \cdot a \cdot \frac{b^3}{3} = [\sigma \cdot (a \cdot b)] \cdot \frac{b^2}{3} = M \cdot \frac{b^2}{3}$$

Por un procedimiento similar, solo que invirtiendo el orden de los diferenciales dx y dy, ya que primero hay que hallar el elemento de área ubicado a una distancia 'x' del eje 'y', y luego integrar el eje 'x' tenemos:

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int x^2 \cdot \sigma \cdot dA = \sigma \int_0^a \int_0^b x^2 \cdot dy \cdot dx \Rightarrow$$

$$I_y = \sigma \int_0^a x^2 \cdot [b - 0] \cdot dx = \sigma \cdot b \int_0^a x^2 \cdot dx \Rightarrow$$

$$I_y = \sigma \cdot b \cdot \left[\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \sigma \cdot b \cdot \frac{a^3}{3} = [\sigma \cdot (a \cdot b)] \cdot \frac{a^2}{3} = M \cdot \frac{a^2}{3}$$

Finalmente en el eje Z resulta:

$$I_z = I_x + I_y = \left[M \cdot \frac{b^2}{3} \right] + \left[M \cdot \frac{a^2}{3} \right] = \frac{M}{3} \cdot (a^2 + b^2) \Rightarrow k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}}$$

Es demostrable que si ubicamos el rectángulo 'ab' centrado en el origen de coordenadas, entonces los momentos de inercias respectivos son:

$$Icm_x = M \cdot \frac{b^2}{12}$$

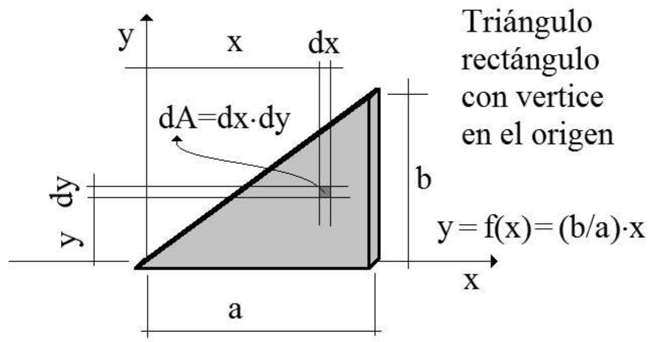
$$Icm_y = M \cdot \frac{a^2}{12}$$

$$Icm_z = M \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{12} \right]$$

Inténtelo como ejercicio.

Ejemplo #5

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



La masa total es la densidad de la superficie por el área de la figura y dado que el área de un triángulo es base por altura entre dos entonces:

$$M = \sigma \cdot Area = \sigma \cdot \left[\frac{a \cdot b}{2} \right]$$

Determinamos el área por integración, así tenemos:

$$M = \sigma \int dA = \sigma \int_0^b \int_0^x dx \cdot dy = \sigma \int_0^b [x - 0] \cdot dy = \sigma \int_0^b x \cdot dy$$

$$pero\ :\ y = \frac{b}{a} \cdot x \Rightarrow x = \frac{a}{b} \cdot y$$

$$M = \sigma \int_0^b \left[\frac{a}{b} \cdot y \right] \cdot dy = \sigma \cdot \frac{a}{b} \cdot \left[\frac{b^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \sigma \cdot \left[\frac{a \cdot b}{2} \right]$$

Determinamos nuestros momentos de inercia:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \sigma \int_0^b \int_x^a y^2 \cdot dx \cdot dy = \sigma \int_0^b y^2 \cdot [a - x] \cdot dy$$

$$pero\ :\ x = \frac{a}{b} \cdot y$$

$$I_x = \sigma \cdot a \int_0^b y^2 \cdot \left[1 - \frac{y}{b} \right] \cdot dy = \sigma \cdot a \int_0^b \left[y^2 - \frac{y^3}{b} \right] \cdot dy \rightarrow$$

$$I_x = \sigma \cdot a \cdot \left[\left[\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4b} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4b} \right] \right] = \sigma \cdot a \cdot \frac{b^3}{12} = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{2} \right] \cdot \frac{b^2}{6} = M \cdot \frac{b^2}{6}$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \sigma \int_0^a \int_0^y x^2 \cdot dy \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot [y - 0] \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot y \cdot dx$$

$$pero\ :\ y = \frac{b}{a} \cdot x$$

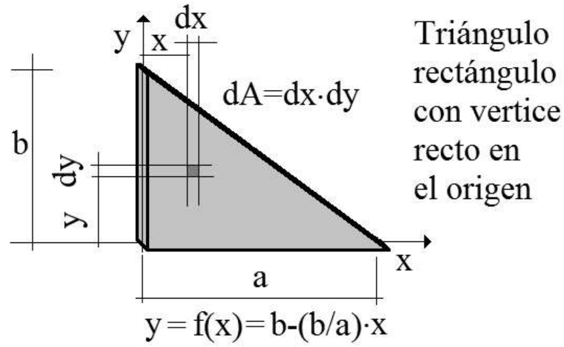
$$I_y = \sigma \cdot \frac{b}{a} \int_0^a x^3 \cdot dx = \sigma \cdot \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{a^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] = \sigma \cdot b \cdot \frac{a^3}{4} = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{2} \right] \cdot \frac{a^2}{2} = M \cdot \frac{a^2}{2}$$

El momento de inercia en 'Z' es:

$$I_z = I_x + I_y = M \cdot \frac{b^2}{6} + M \cdot \frac{a^2}{2} = M \cdot \left[\frac{3a^2 + b^2}{6} \right] \Rightarrow k = \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{6}}$$

Ejemplo #6

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



El área de un rectángulo es base por altura entre dos, entonces la masa total es:

$$M = \sigma \cdot Area = \sigma \cdot \left[\frac{a \cdot b}{2} \right]$$

Igual podemos determinar el área por integración recordando que es una buena manera de aprender a usar los límites en integrales dobles, así tenemos:

$$M = \sigma \int dA = \sigma \int_0^b \int_0^x dx \cdot dy = \sigma \int_0^b [x - 0] \cdot dy = \sigma \int_0^b x \cdot dy$$

$$pero\ :\ y = b - \frac{b}{a} \cdot x \Rightarrow x = \frac{a}{b} \cdot (b - y) = a - \frac{a}{b} \cdot y$$

$$M = \sigma \int_0^b \left[a - \frac{a}{b} \cdot y \right] \cdot dy = \sigma \cdot \left[\left[a \cdot b - \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{2} \right] - \left[a \cdot 0 - \frac{a}{b} \cdot \frac{0^2}{2} \right] \right] = \sigma \cdot \left[\frac{a \cdot b}{2} \right]$$

Los respectivos momentos de inercia son:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \int_0^b \int_0^x y^2 \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = \sigma \int_0^b y^2 \cdot [x - 0] \cdot dy \rightarrow$$

$$donde\ :\ x = a - \frac{a}{b} \cdot y$$

$$I_x = \sigma \int_a^b \left[a \cdot y^2 - \frac{a}{b} \cdot y^3 \right] dy = \sigma \left[\left[a \cdot \frac{b^3}{3} - \frac{a}{b} \cdot \frac{b^4}{4} \right] - \left[a \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{a}{b} \cdot \frac{0^4}{4} \right] \right] \rightarrow$$

$$I_x = \sigma \cdot \frac{a \cdot b^3}{12} = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{2} \right] \cdot \frac{b^2}{6} = M \cdot \frac{b^2}{6}$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int_0^a \int_0^y x^2 \cdot \sigma \cdot dy \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot [y - 0] \cdot dx \rightarrow$$

$$donde\ :\ y = b - \frac{b}{a} \cdot x$$

$$I_y = \sigma \int_a^a \left[b \cdot x^2 - \frac{b}{a} \cdot x^3 \right] dx = \sigma \left[\left[b \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^4}{4} \right] - \left[a \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{b}{a} \cdot \frac{0^4}{4} \right] \right] \rightarrow$$

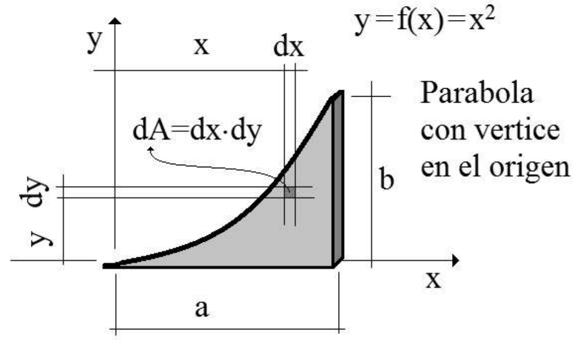
$$I_x = \sigma \cdot \frac{b \cdot a^3}{12} = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{2} \right] \cdot \frac{a^2}{6} = M \cdot \frac{a^2}{6}$$

Finalmente:

$$I_z = I_x + I_y = M \cdot \frac{b^2}{6} + M \cdot \frac{a^2}{6} = M \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{6} \right] \Rightarrow k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}}$$

Ejemplo #7

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Nuevamente un caso superficial donde la masa total es la densidad de la superficie por el área de la figura. Determinamos el área de la figura por integración:

$$M = \int \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_0^a \int_0^y dy \cdot dx = \sigma \int_0^a [y - 0] dx = \sigma \cdot \int_0^a y \cdot dx$$

$$como\ :\ y = x^2 \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{b} = a$$

$$M = \sigma \int_0^a x^2 \cdot dx = \sigma \left[\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \sigma \cdot \frac{a^3}{3} = \sigma \cdot \frac{a \cdot b}{3}$$

Determinamos los momentos de inercias respectivos.

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \int_0^b \int_x^a y^2 \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = \sigma \int_0^b y^2 \cdot [a - x] \cdot dy$$

$$como\ :\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = y^{1/2} \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b} = b^{1/2}$$

$$I_x = \sigma \int_0^b [a \cdot y^2 - y^{2+1/2}] \cdot dy = \sigma \int_0^b [a \cdot y^2 - y^{5/2}] \cdot dy \rightarrow$$

$$I_x = \sigma \cdot \left[\left[a \cdot \frac{b^3}{3} - \frac{b^{7/2}}{7/2} \right] - \left[a \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{0^{7/2}}{7/2} \right] \right] = \sigma \cdot \frac{a \cdot b^3}{21} = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{3} \right] \cdot \frac{b^2}{7} = M \cdot \frac{b^2}{7}$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int_0^a \int_0^y x^2 \cdot \sigma \cdot dy \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot [y - 0] \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot y \cdot dx =$$

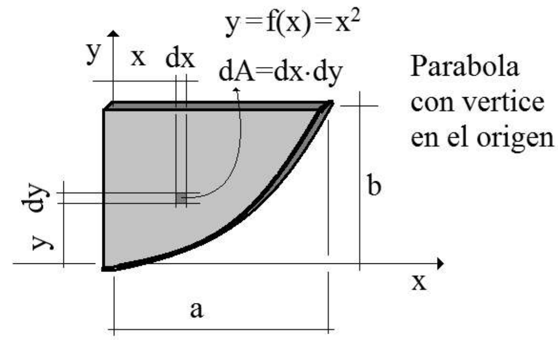
$$como\ :\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = y^{1/2} \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b} = b^{1/2}$$

$$I_y = \sigma \int_0^a x^4 \cdot dx = \sigma \cdot \left[\frac{a^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right] = \left[\sigma \cdot \frac{a \cdot b}{3} \right] \cdot \frac{3a^2}{5} = M \cdot \frac{3a^2}{5}$$

$$I_z = I_x + I_y = M \cdot \frac{b^2}{7} + M \frac{3a^3}{5} = M \cdot \frac{21a^2 + 5b^2}{35} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{21a^2 + 5b^2}{35}}$$

Ejemplo #8

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



El área de la figura sombreada debería ser al área del rectángulo menos el área anterior: $A = ab - ab/3 = 2ab/3$, y lo podemos comprobar calculando la masa:

$$M = \int \sigma \cdot dA = \sigma \int_0^a \int_y^b dy \cdot dx = \sigma \int_0^a [b - y] \cdot dx$$

$$siendo\ :\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \ \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \ = b^{1/2}$$

$$M = \sigma \cdot \int_0^a (b - x^2)dx = \sigma\left[\left[b \cdot a - \frac{a^3}{3}\right] - \left[b \cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right]\right] = \sigma \cdot \frac{2ab}{3}$$

Los momentos de inercia son respectivamente:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \int_0^b \int_0^x y^2 \cdot \sigma \cdot dx \cdot dy = \sigma \int_0^b y^2 \cdot [x - 0] \cdot dy$$

$$donde\ :\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \ \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \ = b^{1/2}$$

$$I_x = \sigma \int_0^b y^2 \cdot y^{1/2} \cdot dy = \sigma \int_0^b y^{5/2} dy = \sigma \cdot \left[\frac{b^{7/2}}{7/2} - \frac{0^{7/2}}{7/2}\right] = \left[\sigma \cdot \frac{2a \cdot b}{3}\right] \cdot \frac{3b^2}{7} = M \cdot \frac{3b^2}{7}$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int_0^a \int_y^b x^2 \cdot \sigma \cdot dy \cdot dx = \sigma \int_0^a x^2 \cdot [b - y] \cdot dx$$

$$donde\ :\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \ \rightarrow b = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \ = b^{1/2}$$

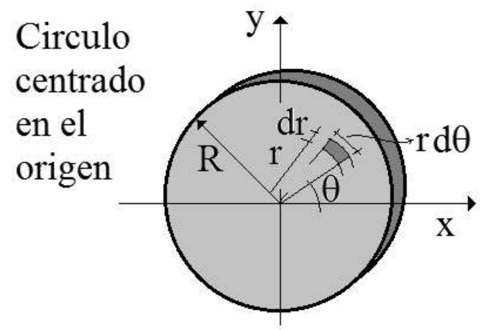
$$I_y = \sigma \int_0^a [bx^2 - y^4] \cdot dx = \sigma \cdot \left[\left[\frac{b \cdot a^3}{3} - \frac{a^5}{5}\right] - \left[\frac{b \cdot 0^3}{3} - \frac{0^5}{5}\right]\right]$$

$$I_y = \sigma \cdot \frac{2b \cdot a^3}{15} = \sigma \cdot \frac{2a \cdot b}{3} \cdot \frac{a^2}{5} = M \cdot \frac{a^2}{5}$$

$$I_z = I_x + I_y = M\frac{3b^2}{7} + M\frac{a^2}{5} = M \cdot \left[\frac{7a^2 + 15b^2}{35}\right] \Rightarrow k = \sqrt{\frac{7a^2 + 15b^2}{35}}$$

Ejemplo #9

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Este es un caso que para determinar el momento de inercia en el eje Z y es preferible el uso de coordenadas polares, aquí la masa de la figura es:

$$M = \sigma \cdot \left[\pi \cdot R^2\right]$$

Podemos demostrar esto integrando:

$$M = \int \sigma \cdot dA = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta \cdot dr = \sigma \cdot \int_0^R [2\pi - 0] \cdot r \cdot dr = \sigma \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \sigma \cdot \left[\pi \cdot R^2\right]$$

El momento de Inercia en Z resulta:

$$I_z = \int r^2 \cdot dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot (\sigma \cdot r \cdot d\theta \cdot dr) = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot d\theta \cdot dr$$

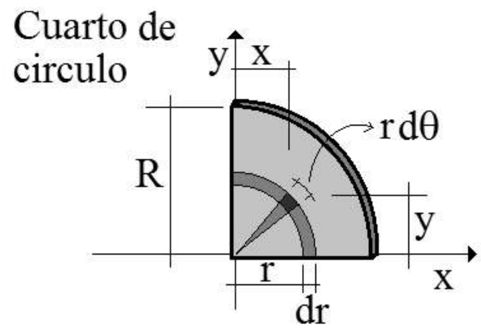
$$I_z = \sigma \int_0^R r^3 \cdot [2\pi - 0] \cdot dr = \sigma \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = \left[\sigma \cdot \pi \cdot R^2\right] \cdot \frac{R^2}{2} = M \cdot \frac{R^2}{2} \Rightarrow k = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Como se trata de una figura simétrica en todos los ejes entonces:

$$I_z = I_x + I_y \quad pero: Ix = Iy \rightarrow Ix = Iy = \frac{Iz}{2} = M \cdot \frac{R^2}{4}$$

Ejemplo #10

Determinamos los momentos de Inercia en los ejes X, Y y Z de:



Para determinar el momento de inercia en el eje Z es preferible aquí otra vez el uso de coordenadas polares, así la masa de la figura es:

$$M = \sigma \cdot \left[\pi \cdot R^2/4\right]$$

O por integración:

$$M = \int \sigma \cdot dA = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r \cdot d\theta \cdot dr = \sigma \cdot \int_0^R [\pi/2 - 0] \cdot r \cdot dr = \sigma \cdot \pi/2 \cdot \left[\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \sigma \cdot \left[\pi \cdot R^2/4\right]$$

El momento de Inercia en Z resulta:

$$I_z = \int r^2 \cdot dm = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot (\sigma \cdot r \cdot d\theta \cdot dr) = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 \cdot d\theta \cdot dr$$

$$I_z = \sigma \int_0^R r^3 \cdot [\pi/2 - 0] \cdot dr = \sigma \cdot \pi/2 \cdot \left[\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = \left[\sigma \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4}\right] \cdot \frac{R^2}{2} = M \cdot \frac{R^2}{2} \Rightarrow k = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Aquí no podemos hacer como hicimos antes para determinar los valores de "I_x" e "I_y" sino que tenemos que aplicar las respectivas expresiones, en este caso:

$$I_x = \int y^2 \cdot dm = \int_0^R \int_0^{\pi/2} y^2 \cdot (\sigma \cdot r \cdot d\theta \cdot dr)$$

$$pero\ :\ y = r \cdot sen\theta$$

$$I_x = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot sen^2\theta \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 \cdot sen^2\theta \cdot d\theta \cdot dr$$

Como el orden de los factores no nos va a alterar la integral, en este caso resolvemos primero el radio.

$$I_x = \sigma \int_0^{\pi/2}\int_0^{R}(r^3 \cdot dr)\cdot(sen^2\theta \cdot d\theta) = \sigma \cdot \left[\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]\cdot \int_0^{\pi/2} sen^2\theta \cdot d\theta$$

$$I_x = (\sigma \cdot R^4/4)\cdot \int_0^{\pi/2} sen^2\theta \cdot d\theta$$

Para resolver la integral del seno cuadrado necesitamos hacer uso de algunas entidades trigonométricas:

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \qquad (1)$$

$$\cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$calculando\ (1)-(2)\ :$$

$$2sen^2 x = 1 - \cos 2x$$

Luego tenemos:

$$I_x = (\sigma \cdot R^4/4)\int_0^{\pi/2} sen^2\theta \cdot d\theta \cdot dr = (\sigma \cdot R^4/4)\int_0^{\pi/2}[1/2 - 1/2\cos 2\theta]\cdot d\theta$$

$$I_x = \left[\frac{(\sigma \cdot R^4/4)}{2}\right]\left[\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\theta \cdot 2d\theta}{2}\right]$$

$$I_x = \left[\frac{\sigma \cdot R^4}{8}\right]\cdot\left[\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \frac{[sen(2(\pi/2)) - sen(2(0))]}{2}\right] = \left[\sigma \cdot \frac{\pi R^2}{4}\right]\left[\frac{R^2}{4}\right] = M \cdot \frac{R^2}{4}$$

Aparte en el eje Y

$$I_y = \int x^2 \cdot dm = \int_0^{R}\int_0^{\pi/2} x^2 \cdot (\sigma \cdot r \cdot d\theta \cdot dr)$$

$$pero\ :\ x = r \cdot \cos\theta$$

$$I_y = \sigma \int_0^{R}\int_0^{\pi/2} r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = \sigma \int_0^{R}\int_0^{\pi/2} r^3 \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta \cdot dr$$

Nuevamente resolvemos primero el radio.

$$I_x = \sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^R (r^3 \cdot dr) \cdot (\cos^2\theta \cdot d\theta) = \sigma \cdot \left[\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$I_x = (\sigma \cdot R^4/4) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot d\theta$$

Y la integral del coseno cuadrado usando las entidades trigonométricas es:

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \qquad (1)$$

$$\cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$sumando \;\; (1)+(2) \;:$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Luego tenemos:

$$I_x = (\sigma \cdot R^4/4) \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot d\theta \cdot dr = (\sigma \cdot R^4/4) \int_0^{\pi/2} [1/2 + 1/2 \cos 2\theta] \cdot d\theta$$

$$I_x = \left[\frac{(\sigma \cdot R^4/4)}{2} \right] \left[\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta \cdot 2d\theta}{2} \right]$$

$$I_x = \left[\frac{\sigma \cdot R^4}{8} \right] \cdot \left[\left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] - \frac{[sen(2(\pi/2)) - sen(2(0))]}{2} \right] = \left[\sigma \cdot \frac{\pi R^2}{4} \right] \left[\frac{R^2}{4} \right] = M \cdot \frac{R^2}{4}$$

Y debe ocurrir que:

$$I_z = I_x + I_y = M \cdot \frac{R^2}{4} + M \cdot \frac{R^2}{4} = M \cdot \frac{R^2}{2}$$

Ejercicios propuestos