

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 12

Este capítulo se dedicó a la segunda ley de Newton y su aplicación al análisis del movimiento de partículas.

Al denotar mediante m la masa de una partícula, por $\Sigma \mathbf{F}$ la suma, o resultante, de las fuerzas que actúan sobre la partícula, y por \mathbf{a} la aceleración de la partícula relativa a un *sistema de referencia newtoniano* [sección 12.2], se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

Al presentar la *cantidad de movimiento lineal* de una partícula, $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ [sección 12.3], se vio que la segunda ley de Newton también puede escribirse en la forma

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

la cual expresa que la resultante *de la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula*.

La ecuación (12.2) se cumple sólo si se usa un sistema consistente en unidades. Con unidades del SI, las fuerzas se expresarán en newtons, las masas en kilogramos y las aceleraciones en m/s^2 ; con unidades de uso común en Estados Unidos las fuerzas deben expresarse en libras, las masas en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$ (conocidas también como *slugs*), y las aceleraciones en ft/s^2 [sección 12.4].

Para resolver un problema que implica el movimiento de una partícula, la ecuación (12.2) debe sustituirse por ecuaciones que contengan cantidades escalares [sección 12.5]. Al usar *componentes rectangulares* de \mathbf{F} y \mathbf{a} , se escribe

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Mediante las *componentes tangencial y normal*, se tiene

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

También se señaló [sección 12.6] que las ecuaciones del movimiento de una partícula pueden sustituirse por ecuaciones similares a las de equilibrio que se usan en estática si un vector $-m\mathbf{a}$ de magnitud ma pero de sentido opuesto al de la aceleración, se añade a las fuerzas aplicadas a la partícula; en ese caso se dice que la partícula está en *equilibrio dinámico*. Sin embargo, por uniformidad, todos los problemas resueltos se solucionaron utilizando las ecuaciones de movimiento, primero con componentes rectangulares [problemas resueltos 12.1 a 12.4] y después con las componentes tangencial y normal [problemas resueltos 12.5 y 12.6].

Segunda ley de Newton

Cantidad de movimiento lineal

Sistemas de unidades consistentes

Ecuaciones de movimiento de una partícula

Equilibrio dinámico

Cantidad de movimiento angular

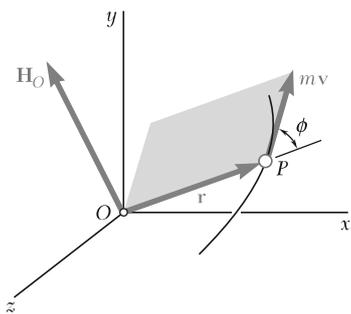


Figura 12.24

Razón de cambio de la cantidad del movimiento angular

Componentes radial y transversal

Movimiento bajo una fuerza central

En la segunda parte del capítulo se definió la *cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}_O de una partícula alrededor de un punto O como el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ de esa partícula [sección 12.7]. Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

y se tiene que \mathbf{H}_O es un vector perpendicular en el plano que contiene \mathbf{r} y $m\mathbf{v}$ (figura 12.24) y de magnitud

$$H_O = rmv \sin \phi \quad (12.13)$$

Al descomponer los vectores \mathbf{r} y $m\mathbf{v}$ en componentes rectangulares, se expresa la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O en la forma determinada

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy , se tiene $z = v_z = 0$. La cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy y está completamente definida por su magnitud. Se escribe

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

Al calcular la tasa de cambio $\dot{\mathbf{H}}_O$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O , y al aplicar la segunda ley de Newton, se escribe la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

la cual establece que *la suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad del movimiento angular de la partícula en torno a O .*

En muchos problemas que implican el movimiento plano de una partícula, se encontró conveniente utilizar las *componentes radial y transversal* [sección 12.8, problema resuelto 12.7] y escribir las ecuaciones

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es la fuerza \mathbf{F} dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O , se dice que la partícula se mueve *bajo la acción de una fuerza central* [sección 12.9]. Puesto que $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante dado, se concluye de la ecuación (12.19) que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para todos los valores de t y, en consecuencia, que

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

Se concluye que *la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección*, y que la partícula se mueve en un plano perpendicular al vector \mathbf{H}_O .

Al recordar la ecuación (12.13), se escribe la relación

$$rmv \sin \phi = r_0mv_0 \sin \phi_0 \quad (12.25)$$

para el movimiento de cualquier partícula bajo una fuerza central (figura 12.25). Mediante coordenadas polares y recordando la ecuación (12.18), se obtuvo también

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

donde h es una constante que representa la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, H_O/m , de la partícula. Se señaló (figura 12.26) que el área infinitesimal dA que barre el radio vector OP cuando gira un ángulo $d\theta$ es igual a $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ y, en consecuencia, que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la *velocidad del área* dA/dt de la partícula. Por lo tanto, la *velocidad de área de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante*.

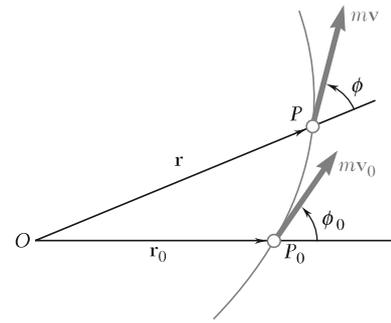


Figura 12.25

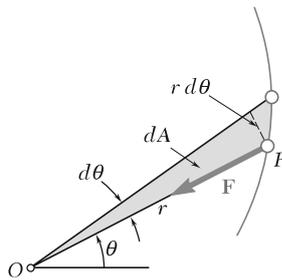


Figura 12.26

Una aplicación importante del movimiento bajo una fuerza central la ofrece el movimiento orbital de cuerpos sometidos a la atracción gravitacional [sección 12.10]. De acuerdo con la *ley de Newton de la gravitación universal*, dos partículas a una distancia r una de la otra y de masas M y m , respectivamente, se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une las partículas (figura 12.27). La magnitud común F de las dos fuerzas es

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

donde G es la *constante de gravitación*. En el caso de un cuerpo de masa m sujeto a la atracción gravitacional de la Tierra, el producto GM , donde M es la masa de la Tierra, puede expresarse como

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$ y R es el radio de la Tierra.

Se demostró en la sección 12.11 que una partícula que se mueve bajo una fuerza central describe una trayectoria definida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

Ley de Newton de la gravitación universal

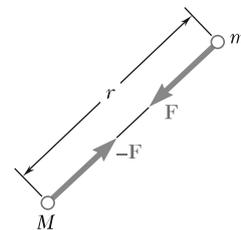


Figura 12.27

Movimiento orbital

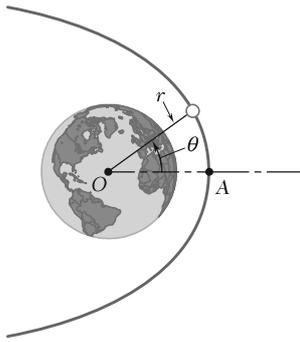


Figura 12.28

Velocidad de escape

Periodo orbital

Leyes de Kepler

donde $F > 0$ corresponde a una fuerza atractiva y $u = 1/r$. En el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción gravitacional [sección 12.12], se sustituye F por la expresión dada en la ecuación (12.28). Midiendo θ a partir del eje OA que une el foco O con el punto A de la trayectoria más cercano a O (figura 12.28), se encuentra que la solución de la ecuación (12.37) era

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

Ésta es la ecuación de una cónica de excentricidad $\epsilon = Ch^2/GM$. La cónica es una *elipse* si $\epsilon < 1$, una *parábola* si $\epsilon = 1$, y una *hipérbola* si $\epsilon > 1$. Es posible determinar las constantes C y h de las condiciones iniciales; si la partícula se proyecta desde el punto A ($\theta = 0, r = r_0$) con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a OA , tenemos $h = r_0 v_0$ [problema resuelto 12.9].

Se indicó también que los valores de la velocidad inicial correspondientes, respectivamente, a una trayectoria parabólica y a una circular eran

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (12.43)$$

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad (12.44)$$

y que el primero de estos valores, denominado la *velocidad de escape*, es el valor más pequeño de v_0 para el cual la partícula no regresará a su punto de partida.

El *periodo orbital* τ de un planeta o satélite se definió como el tiempo requerido por el cuerpo para describir su órbita. Se mostró que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

donde $h = r_0 v_0$ y donde a y b representan los semiejes mayor y menor de la órbita. Se indicó además que estos semiejes son iguales respectivamente a las medias aritmética y geométrica de los valores máximo y mínimo del vector radio r .

La última sección del capítulo [sección 12.13] presentó las *leyes de Kepler del movimiento planetario* y mostró que estas leyes empíricas, obtenidas a partir de antiguas observaciones astronómicas, confirman las leyes de movimiento de Newton, así como su ley de gravitación.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 13

Este capítulo se dedicó al método del trabajo y la energía y al del impulso y la cantidad de movimiento. En la primera mitad del capítulo se estudió el método del trabajo y la energía y su aplicación al análisis del movimiento de las partículas.

Se consideró una fuerza \mathbf{F} que actuaba sobre una partícula A y se definió *el trabajo de \mathbf{F} correspondiente al pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$* [sección 13.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.1)$$

o, si se recuerda la definición del producto escalar de dos vectores,

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (13.1')$$

donde α es el ángulo entre \mathbf{F} y $d\mathbf{r}$ (figura 13.29). El trabajo de \mathbf{F} durante un desplazamiento finito desde A_1 hasta A_2 , denotado por $U_{1 \rightarrow 2}$, se obtuvo al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.2)$$

Para una fuerza definida por sus componentes rectangulares, se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.2'')$$

El trabajo del peso \mathbf{W} de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve desde la altura y_1 hasta y_2 (figura 13.30) se obtuvo al sustituir $F_x = F_z = 0$ y $F_y = -W$ en la ecuación (13.2'') e integrar. Se encuentra

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

Trabajo de una fuerza

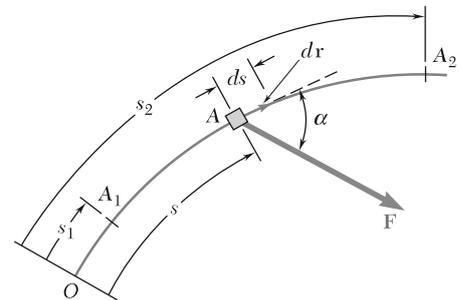


Figura 13.29

Trabajo de un peso

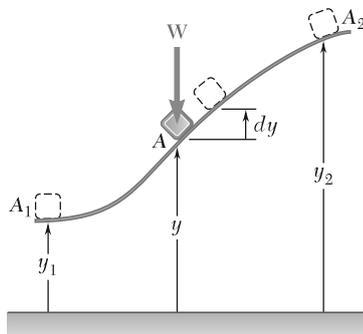


Figura 13.30

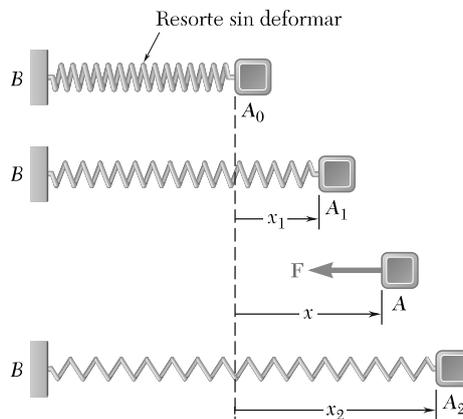


Figura 13.31

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

El trabajo de una fuerza \mathbf{F} ejercida por un resorte sobre un cuerpo A durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 13.31) desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtuvo al escribir

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

El trabajo de \mathbf{F} es por tanto positivo cuando el resorte regresa a su posición no deformada.

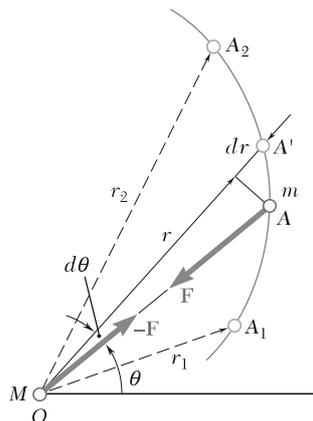


Figura 13.32

Trabajo de la fuerza gravitacional

El trabajo de la fuerza gravitacional \mathbf{F} ejercido por una partícula de masa M localizada en O sobre una partícula de masa m cuando la última se desplaza desde A_1 hasta A_2 (figura 13.32) se obtuvo al recordar de la sección 12.10 la expresión para la magnitud de \mathbf{F} y al escribir

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

Energía cinética de una partícula

La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} [sección 13.3] se definió como la cantidad escalar

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

De la segunda ley de Newton se dedujo el *principio del trabajo y la energía*, el cual señala que *la cinética de una partícula en A_2 puede obtenerse sumando a su energía en A_1 el trabajo realizado durante el desplazamiento de A_1 a A_2 por la fuerza \mathbf{F} ejercida sobre la partícula:*

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

El método del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas que tienen que ver con fuerzas, desplazamientos y velocidades, ya que no requiere la determinación de aceleraciones [sección 13.4]. Además se advirtió que sólo incluye cantidades escalares y que las fuerzas que no realizan trabajo no necesitan considerarse [problemas resueltos 13.1 y 13.3]. Sin embargo, este método debe complementarse con la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar una fuerza normal a la trayectoria de la partícula [problema resuelto 13.4].

La potencia desarrollada por una máquina y su eficiencia mecánica se estudiaron en la sección 13.5. La potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.12, 13.13)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza que se ejerce sobre la partícula y \mathbf{v} la velocidad de esta misma [problema resuelto 13.5]. La *eficiencia mecánica*, denotada por η , se expresó como

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (13.15)$$

Cuando el trabajo de una fuerza \mathbf{F} es independiente de la trayectoria que se sigue [secciones 13.6 y 13.7], se afirma que la fuerza \mathbf{F} es una *fuerza conservativa*, y que su trabajo es igual al *negativo del cambio en la energía potencial V* asociado con \mathbf{F} :

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

Las siguientes expresiones se obtuvieron para la energía potencial asociada con cada una de las fuerzas consideradas antes:

Fuerza de gravedad (peso): $V_g = Wy \quad (13.16)$

Fuerza gravitacional: $V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$

Fuerza elástica ejercida por un resorte: $V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$

Principio del trabajo y la energía

Método del trabajo y la energía

Potencia y eficiencia mecánica

Fuerza conservativa. Energía potencial

Principio de la conservación de la energía

Movimiento bajo una fuerza gravitacional

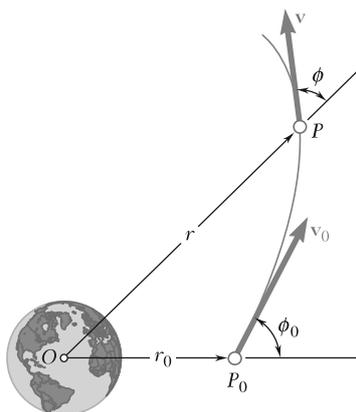


Figura 13.33

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula

Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de la ecuación (13.19') en la ecuación (13.11) y reagrupar los términos [sección 13.8], se obtuvo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

Éste es el *principio de la conservación de la energía*, el cual establece que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante*. La aplicación de este principio facilita la solución de problemas que incluyen únicamente fuerzas conservativas [problemas resueltos 13.6 y 13.7].

Al recordar de la sección 12.9 que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central \mathbf{F} , su cantidad de movimiento angular alrededor del centro de fuerza O permanece constante, se señaló [sección 13.9] que, si la fuerza central \mathbf{F} también es conservativa, es posible utilizar de manera conjunta los principios de la conservación de la cantidad de momento angular y de la conservación de la energía para analizar el movimiento de la partícula [problema resuelto 13.8]. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un vehículo espacial es tanto central como conservativa, se utilizó este enfoque para estudiar el movimiento de tales vehículos [problema resuelto 13.9] y se encontró que era en particular efectivo en el caso de un *lanzamiento oblicuo*. Al considerar la posición inicial P_0 y una posición arbitraria P del vehículo (figura 13.33), se escribió

$$(H_O)_0 = H_O: \quad r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 = r m v \text{ sen } \phi \quad (13.25)$$

$$T_0 + V_0 = T + V: \quad \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.26)$$

donde m fue la masa del vehículo y M la masa de la Tierra.

La segunda mitad del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento y su aplicación a la solución de diversos tipos de problemas que implican el movimiento de partículas.

La *cantidad de movimiento lineal de una partícula* se definió [sección 13.10] como el producto $m\mathbf{v}$ de la masa m de la partícula y su velocidad \mathbf{v} . De la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se dedujo la relación

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 \quad (13.28)$$

donde $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ representan la cantidad de movimiento de la partícula en un tiempo t_1 y en un tiempo t_2 , respectivamente, y donde la integral define el *impulso lineal de la fuerza \mathbf{F}* durante el intervalo correspondiente. Por lo tanto, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.30)$$

que expresa el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula.

Cuando la partícula considerada está sujeta a varias fuerzas, es necesario usar la suma de los impulsos de estas fuerzas; se tuvo

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

Puesto que las ecuaciones (13.30) y (13.32) implican *cantidades vectoriales*, es necesario considerar por separado sus componentes x y y cuando se aplican a la solución de un problema determinado [problemas resueltos 13.10 y 13.11].

El método del impulso y de la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, cuando fuerzas muy grandes, denominadas *fuerzas impulsivas*, se aplican durante el intervalo Δt , muy corto, ya que este método implica los impulsos $\mathbf{F} \Delta t$ de las fuerzas, más que las fuerzas mismas [sección 13.11]. Ignorando el impulso de toda fuerza no impulsiva, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = m\mathbf{v}_2 \quad (13.35)$$

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, se tuvo

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.36)$$

donde el segundo término implica sólo fuerzas externas impulsivas [problema resuelto 13.12].

En el caso particular *en el que la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero*, la ecuación (13.36) se reduce a $\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$; esto es, *la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva*.

En las secciones 13.12 a 13.14 se consideró el *impacto central* de dos cuerpos que chocan. En el caso de un *impacto central directo* [sección 13.13], los dos cuerpos que chocan A y B se movían a lo largo de la *línea de impacto* con velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B , respectivamente (figura 13.34). Podrían usarse dos ecuaciones para determinar sus velocidades \mathbf{v}'_A y \mathbf{v}'_B después del impacto. La primera

Movimiento por impulso

Impacto central directo

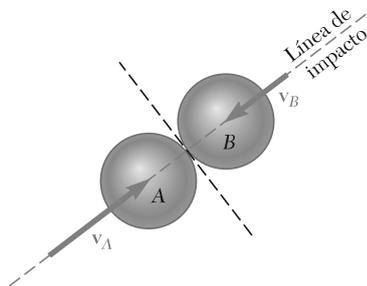


Figura 13.34

expresaba la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

donde un signo positivo indica que la velocidad correspondiente está dirigida hacia la derecha, en tanto que la segunda relaciona las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

La constante e se conoce como el *coeficiente de restitución*; su valor se encuentra entre 0 y 1 y depende en gran medida de los materiales implicados. Cuando $e = 0$, se dice que el impacto es *perfectamente plástico*; cuando $e = 1$, se afirma que es *perfectamente elástico* [problema resuelto 13.13].

Impacto central oblicuo

En el caso de un *impacto central oblicuo* [sección 13.14], las velocidades de los dos cuerpos que chocan antes y después del impacto se descompusieron en las componentes n a lo largo de la línea de impacto y de las componentes t a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto (figura 13.35). Se observó que la componente t de la velocidad de cada cuerpo permaneció inalterada, en

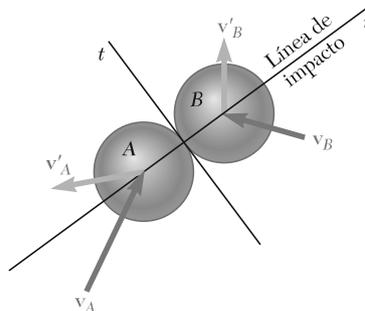


Figura 13.35

tanto que las componentes n satisfacían ecuaciones similares a la (13.37) y a la (13.43) [problemas resueltos 13.14 y 13.15]. Se demostró que aunque este método se desarrolló para cuerpos que se mueven con libertad antes y después del impacto, sería posible extenderlo al caso en el que uno o ambos de los cuerpos que chocan presenta restricciones en su movimiento [problema resuelto 13.16].

Empleo de los tres métodos fundamentales del análisis cinético

En la sección 13.15 se analizaron las ventajas relativas de los tres métodos fundamentales que se presentaron en este capítulo y en el precedente, esto es, la segunda ley de Newton, el trabajo y la energía, y el impulso y la cantidad de movimiento. Se señaló que el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento pueden combinarse para resolver problemas que implican una fase corta de impacto durante la cual las fuerzas impulsivas deben tomarse en cuenta [problema resuelto 13.17].