Las matemáticas y la física

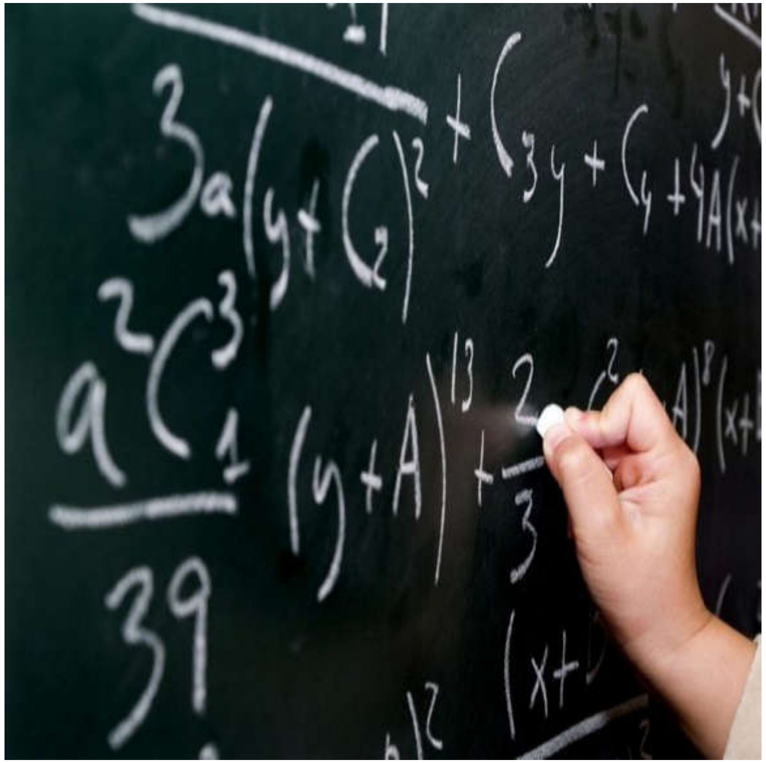
una introducción al calculo

Prof. R. Nitsche C.

Física Medica – UDO Bolívar

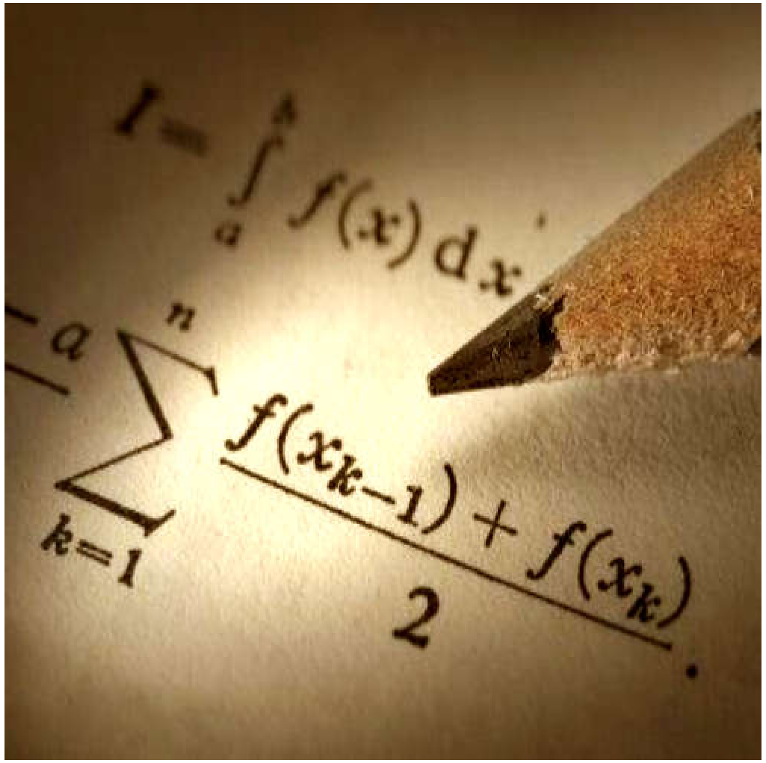
Las matemáticas

- Las ***matemáticas*** (que en entran en el grupo de las ***ciencias formales***) no explican el mundo (como hacen las ***ciencias empíricas***, naturales o humanas) por lo tanto no son ciencias en el sentido estricto, l**a matemática, como la lógica, no observan, ni interpretan, pero si juzgan**.
- Las ***matemáticas*** sólo aportan herramienta a las ***ciencias empíricas*** para poder estudiar el mundo, y es por ello que siempre han tenido un sentido práctico o utilitario.



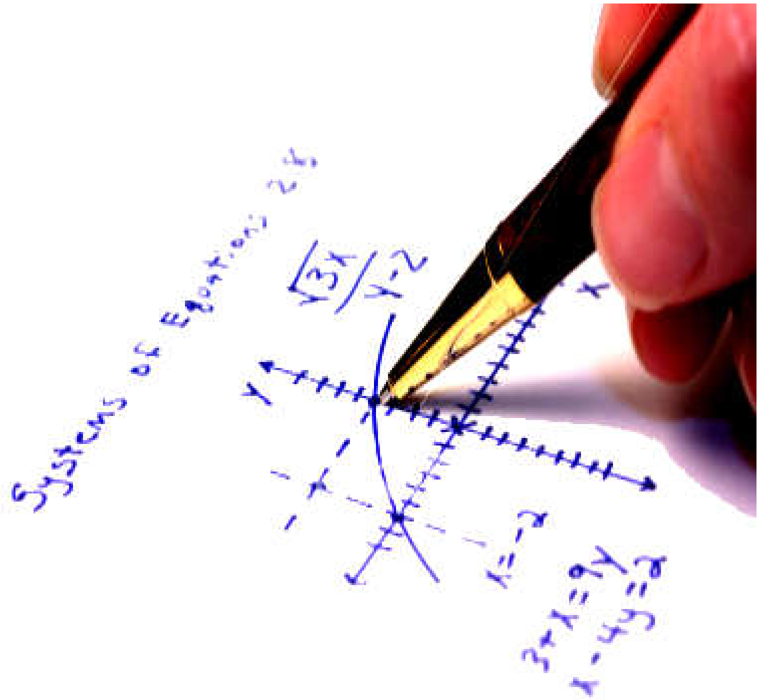
Introducción a las Matemáticas (1)

- Las ***matemáticas*** son una ciencia formal que, partiendo de axiomas (*premisas o reglas*) y siguiendo el razonamiento lógico deductivo (que de premisas se pueden derivar conclusiones) estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas (*que existen sólo en su cabeza*) como son los números, las figuras geométricas o los símbolos.
- Se emplean para estudiar las relaciones cuantitativas (los números), las estructuras, las relaciones geométricas y las magnitudes variables generalmente.



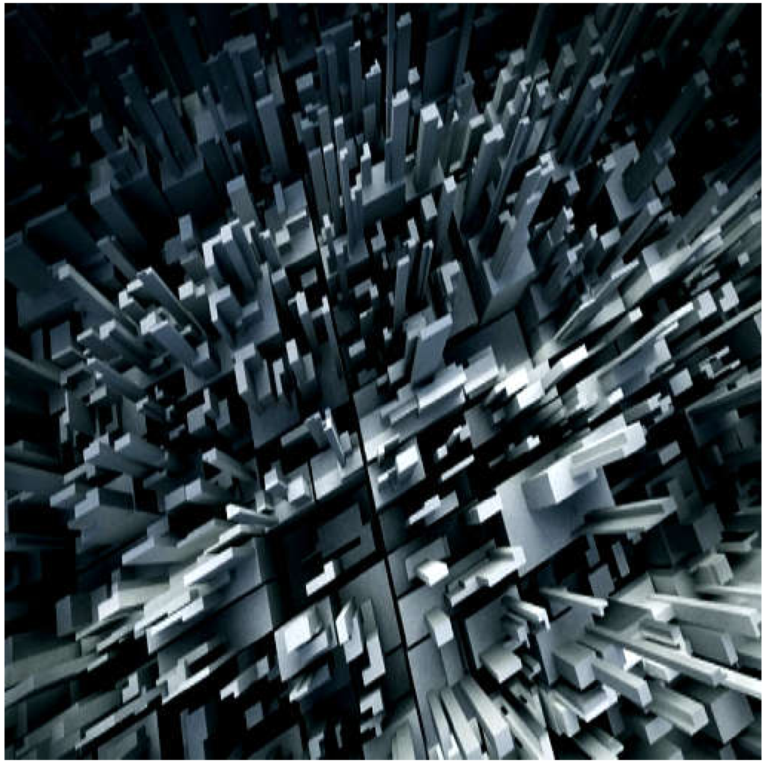
Introducción a las Matemáticas (2)

- Uno suele hablar de **las matemáticas** (en plural) porque ella es realmente la fusión de muchas cosas distintas que comparten elementos comunes.
- Con la ***aritmética*** aprendemos a contar (suma, resta, multiplicación y división); el ***algebra*** nos habla de las relaciones entre las cantidades y el origen de las funciones matemáticas, la ***geometría*** se preocupa del estudio de las figuras en el plano o el espacio; y la ***trigonometría*** estudio de los ángulos y sus relaciones con los triángulos.



Introducción a las Matemáticas (3)

- Más avanzado es el ***calculo*** (infinitesimal) que estudia situaciones de límites, derivadas, integrales y convergencias de series infinitas.
- El ***calculo*** tiene gran aplicación en distintas ramas de la ciencia, su poder ha permitido generar leyes físicas fundamentales, destaca en los estudios sobre los sistemas de las partículas, la mecánica de fluidos, la teoría electromagnética, la teoría atómica, la ingeniería mecánica, entre muchos otros ejemplos.



Introducción a las Matemáticas (4)

- Las ***matemáticas recreativas*** estudian cosas como los cuadrados mágicos (sudokus), los poliominos (juntar piezas), el origami, el cubo de rubik, etc…
- Muchas cosas que empezaron como juegos dieron origen a ramas serias de la matemática, como los juegos de cartas a la ***probabilidad*** que estudia las combinaciones posibles en distintos objetos y su relación con el azar.

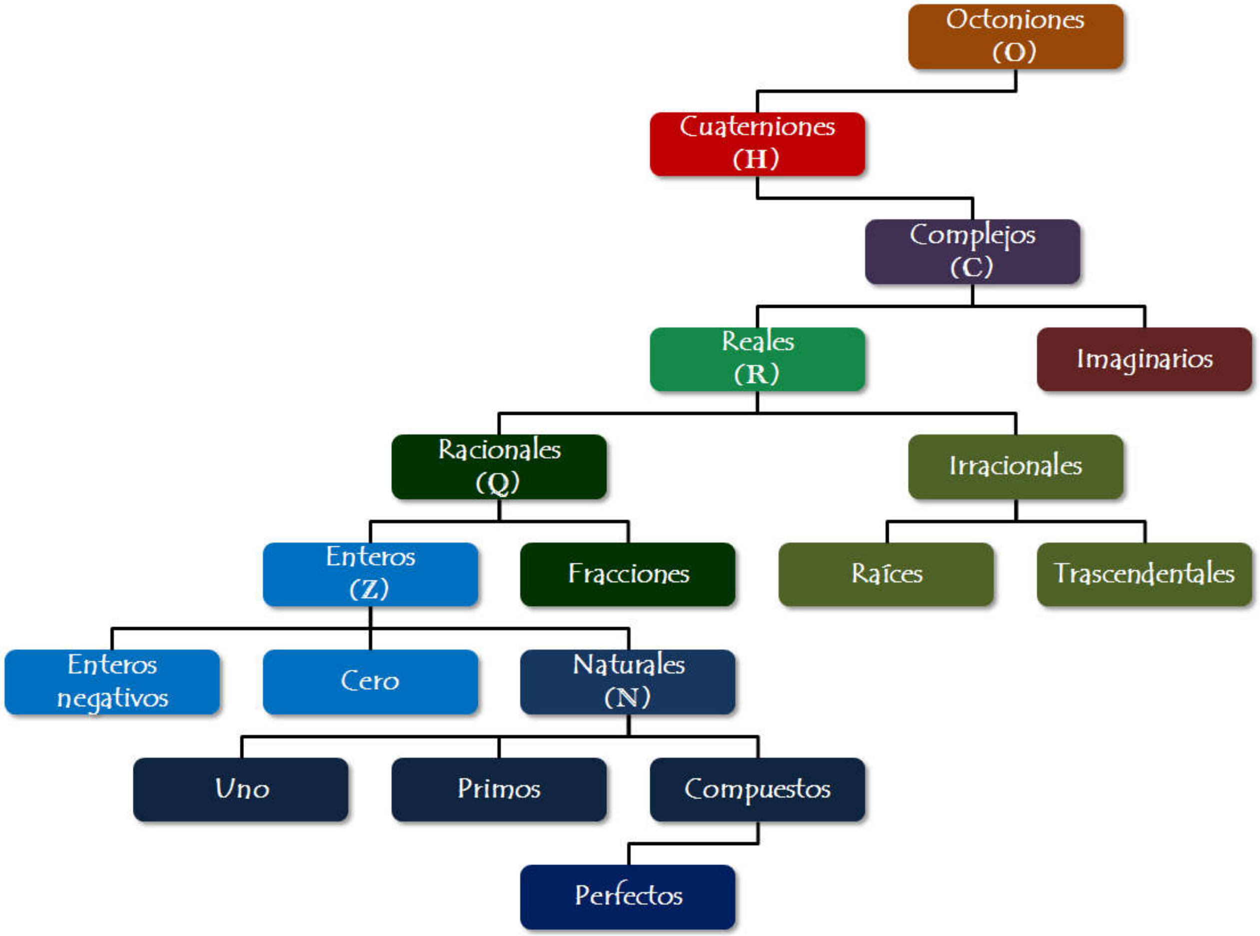
Introducción a las Matemáticas (5)

- Las ***teorías de conjuntos y/o grupos***, ubicada entre la lógica formal y las matemáticas trabajan las relaciones entre colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismos.
- Estas teorías han permitido unir las muchas ramas en una sola matemática y los estudios de estas relaciones dieron origen posterior ramas como la ***informática*** (procesar y transmitir información generando algoritmos)

Introducción a las Matemáticas (6)

- Las ***matemáticas aplicadas*** incluyen a la ***probabilidad***, y la ***estadística*** que permite inferir resultado de datos tomando en cuenta la probabilidad.
- Por otra parte los ***métodos numéricos*** parten del uso de algoritmos y series, para dar resultados aproximados a situaciones reales y a resolver problemas del ***calculo*** que no pueden resolverse por procedimientos algebraicos.

Los números (1)



Los números (2)

- ***Un número, en ciencia, es un concepto que expresa una cantidad en relación a su unidad.***
- También puede indicar el orden de una serie (*números ordinales: primero, segundo, tercero…*).
- En el sentido amplio, indica el carácter gráfico que sirve para representarlo; dicho signo gráfico de un número recibe el nombre de **numeral** o **cifra**. El que se escribe con un solo **guarismo** se llama **dígito**.

Los números (3)

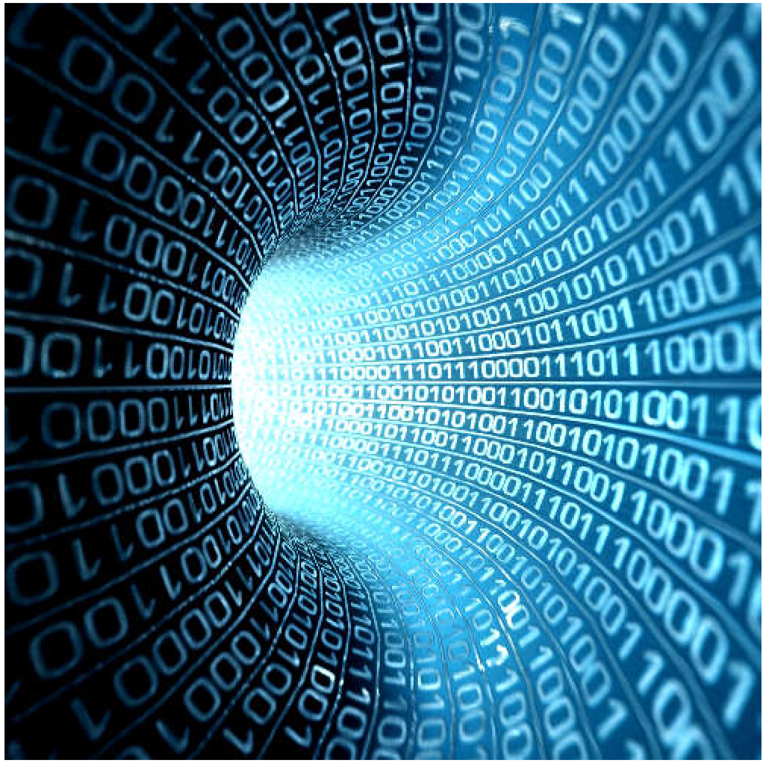
- Hoy en matemáticas los ***números*** y sus agrupaciones responden a una serie de ***axiomas*** o normas para generarlos, la más sencillas son las de los ***números naturales***:
  – *Todo número natural es la suma de un natural anterior más el **Uno***
  – *El **Uno** no tiene anterior*
  – *La suma de dos naturales da un natural*
  – *La multiplicación de dos naturales es un número natural*
  – *… etc.*

Los números (4)

- Hasta alcanzar los ***números reales*** (*que representan gráficamente la distancia o medida de cualquier punto en una recta comparada con la unidad*), los tipos de números surgieron para ir sorte-ando obstáculos, no es posible con los naturales a tres gatos de un canasto quitar (restar) cuatro; así surgen los ***enteros***; no es posible dividir cinco manzanas entre siete personas, así surgen los ***racionales***; no es posible calcular la raíz de 2 como una fracción, ahí surgen los ***irracio-nales***.

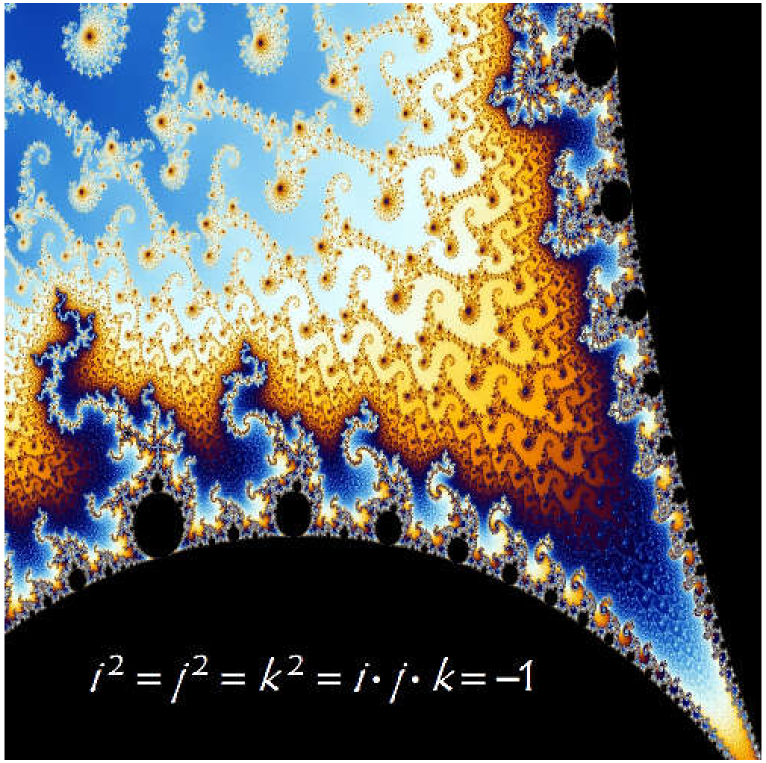
Los números (5)

- Los ***números imaginarios*** surgieron para calcular las raíces cuadradas de números negativos; inicialmente la cantidad $i^2 = -1$ se empleó sólo de forma algebraica, posteriormente la unión de reales e imaginarios dio un par ordenado $[(x+y \cdot i) \Rightarrow (x,y)]$, los ***números complejos***, que representaban puntos en un plano XY
- Con este conjunto de números se solucionaban todos los problemas del algebra y se encontraba que para una raíz de orden ‘n’ existen ‘n’ soluciones en el plano complejo.



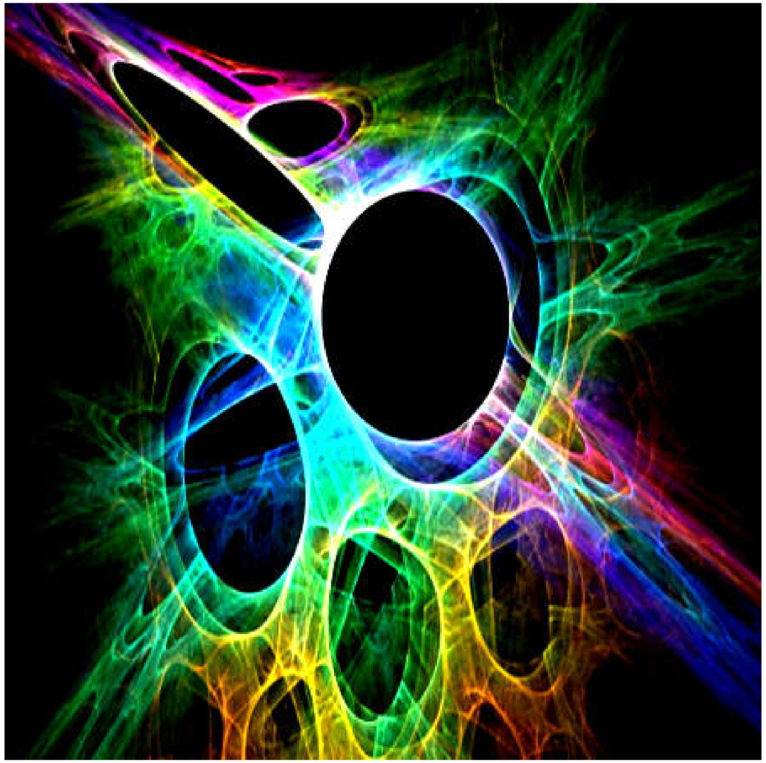
Los números (6)

- <u>El significado geométrico de la unidad imaginaria 'i' es que representa una rotación de 90°.</u>
- Esta idea de rotación fue extendida a tres (por el espacio de tres dimensiones), siendo los ejes de rotación indicados con i, j y k; fue el origen de los vectores en el espacio.
- El tratar encontrar un conjunto de números que respondiera reglas del algebra (incluida la división que no existe en vectores) dio paso a los ***números cuaterniones***, que son la unión de un escalar y un vector tridimensional $(t+(x\cdot i+y\cdot j+z\cdot k))$ ⇨(t,x,y,z) .

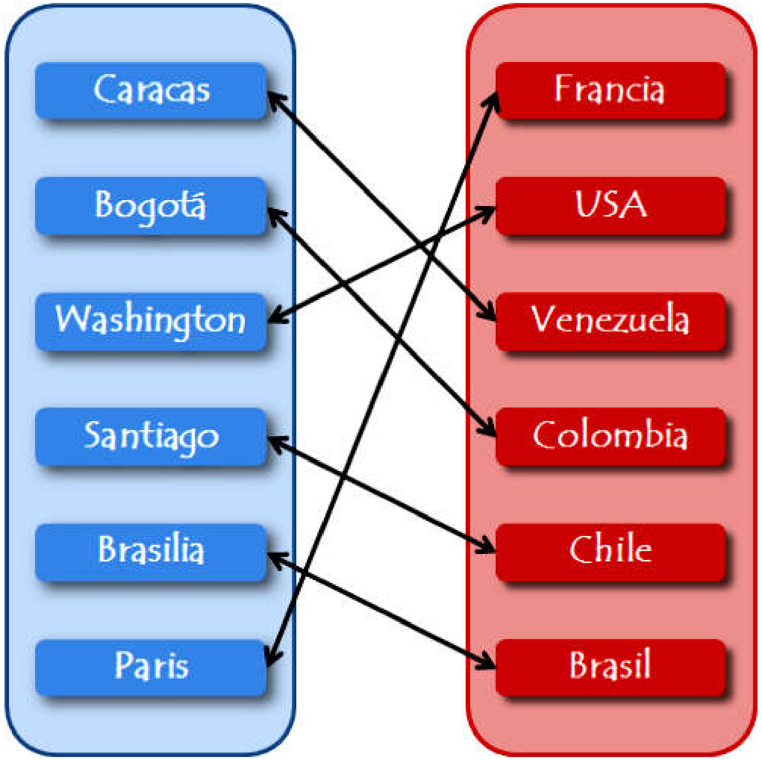


Los números (7)

- Hoy para problemas básicos de mecánica clásica basta con usar ***números reales***, el uso de ***números complejos*** tiene importancia en problemas de circuitos eléctricos, mecánica de fluidos, mecánica relativista y en mecánica cuántica.
- Los ***números cuaterniones*** entra-ron con fuerza en la física cuántica y en el estudio de los fractales; y modernas teorías que buscan explicar el todo (ejemplo la teoría de cuerdas), dan como posibilidad hacer el uso de los ***números octoniones***, números compuestos por ocho cantidades.



Conjuntos y funciones



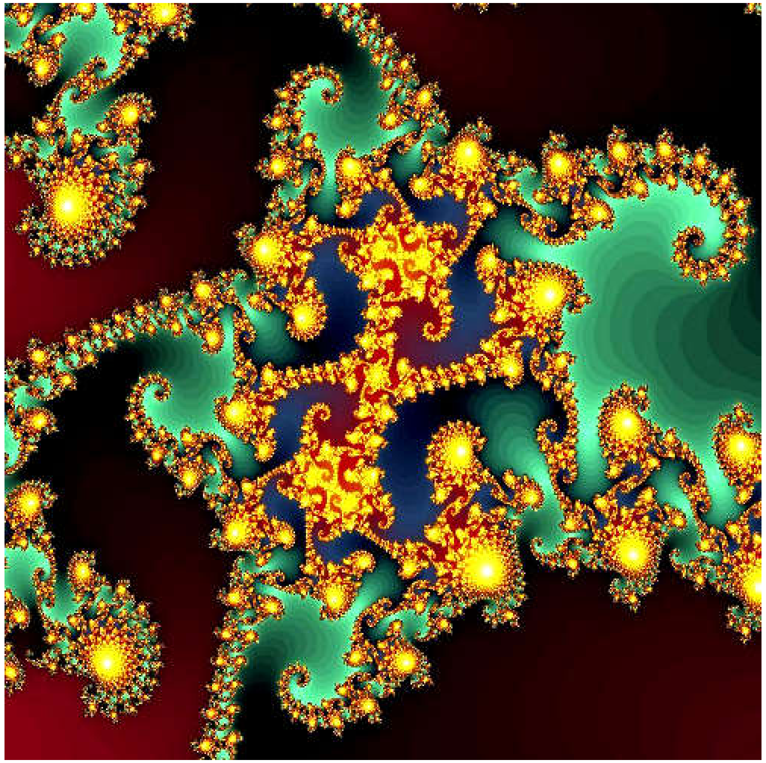
- La noción de ***conjunto*** es aceptada como sinónimo de colección y/o agrupación de objetos.
- Los objetos de un conjunto se llaman: ***miembros*** o ***elementos***.
- Cuando dos conjuntos se relacionan se habla de ***función*** si cada elemento de uno de los conjuntos se relaciona con uno y solo un elemento del otro conjunto.
- El ejemplo muestra dos conjuntos relacionados con una ***función biyéctiva*** y con ***correspondencia biunivoca*** (uno a uno).

Funciones matemáticas

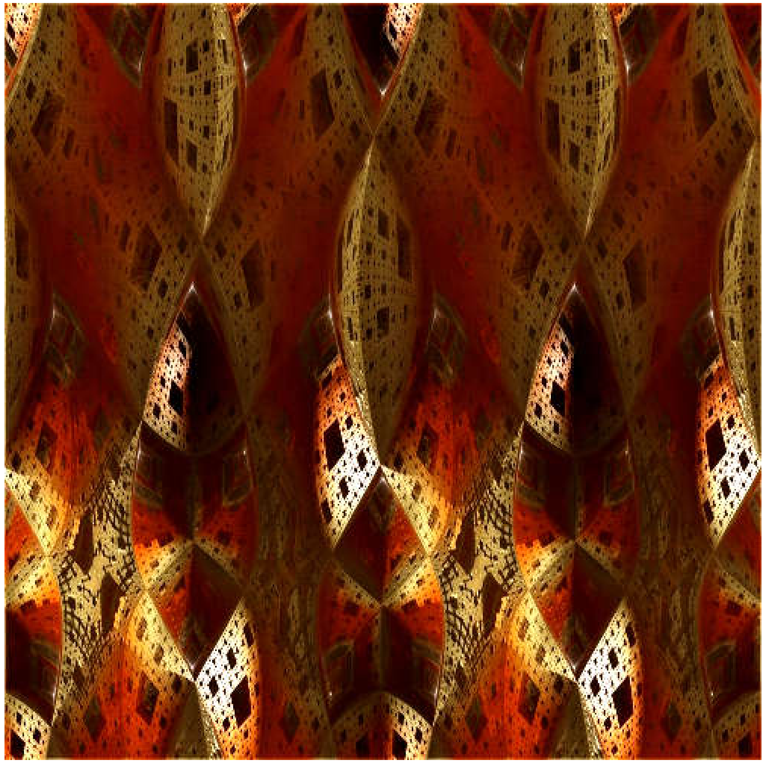
- Las funciones matemáticas (que vinculan cantidades numéricas) se suelen clasificar según la forma de relación entre las variables relacionadas.
- Son ***funciones explicitas*** aquellas de la forma y=f(x); como por ejemplo $y = x+3x^2$.
- Son ***funciones implicistas*** aquellas donde una variable no se puede poner en función de la otra. Ejemplo: $3x+2y^2x-y^5=0$.
- Las funciones que dependen de relaciones algebraicas dan origen a funciones ***polinómicas***, ***racionales*** y ***radicales***.
- Las que no entran en la categoría anterior se llaman **trascendentes**, entre ellas están las ***trigono-métricas***, las ***exponenciales*** y las ***logarítmicas***.
- Si bien la mayoría de las funciones relacionan dos cantidades, existen algunas funciones donde una cantidad depende de varias otras, son ***funciones multi-variables***.

Operaciones con funciones

- Con las funciones se pueden realizar muchas operaciones, las más simples son la suma/resta y la multiplicación/división de funciones.
- Existen operaciones en las que algunas funciones se 'transfor-man' en otras distintas; ejemplos son las operaciones de **derivación** e **integración** dentro del calculo infinitesimal.
- Las funciones que involucran derivadas o integrales dan origen a ***ecuaciones diferenciales*** y pueden ser ordinarias o parciales.

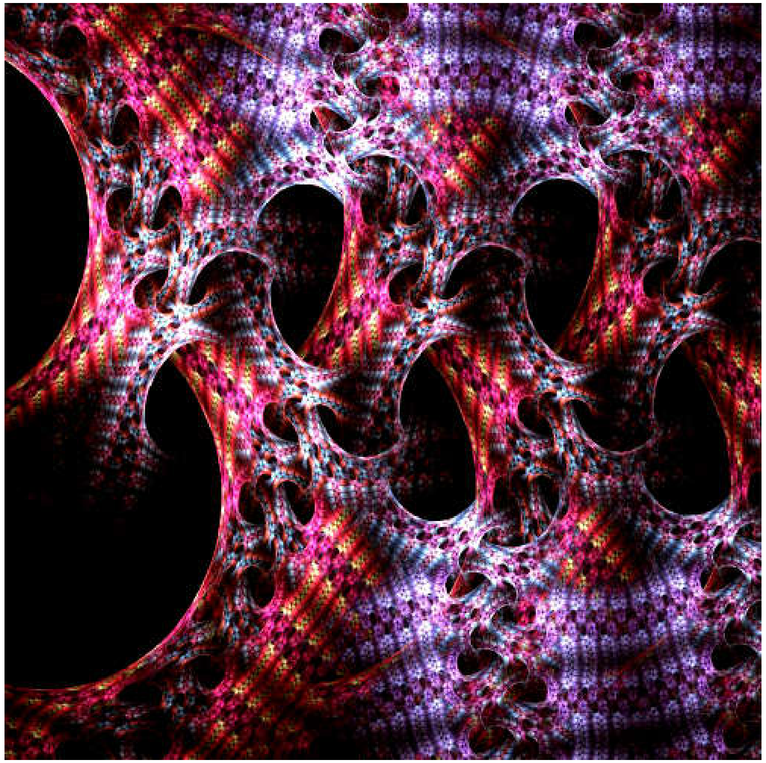


Las funciones y la física (1)



- Las funciones matemáticas permiten expresar con símbolos relaciones y leyes entre cantidades físicas.
- Algunas son explicitas y lineales, como por ejemplo la *ley de Ohn* [*Potencial Eléctrico es directa-mente proporcional a la corriente eléctrica* $\Delta V = R \cdot i$],
- Otras son racionales como la *ley de gravedad universal* [*la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa el producto de las masas* $F = G \cdot m \cdot M / r^2$].

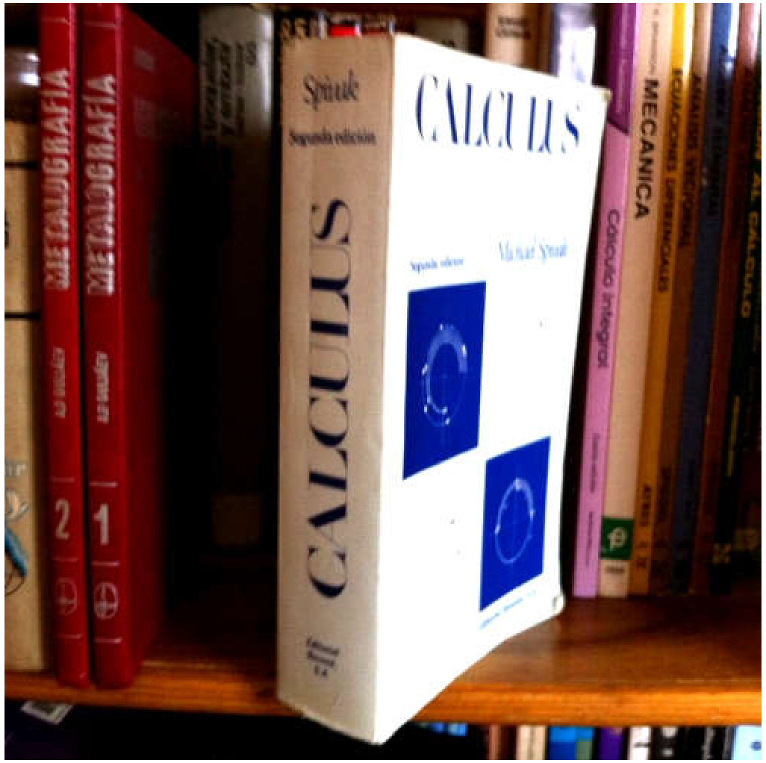
Las funciones y la física (2)



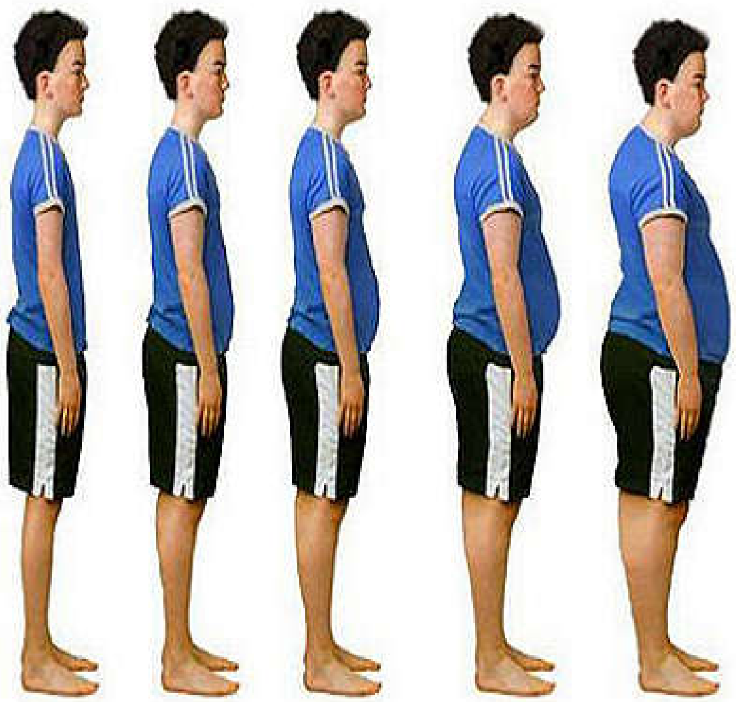
- En muchas leyes física tenemos a varias cantidades afectando a una en particular. [*Por ejemplo en la ley de gases ideales, la presión depende de la temperatura y el volumen del gas* $p = n \cdot R \cdot T/vol$].
- Algunas de las leyes físicas son descritas con *ecuaciones diferenciales*. [*La segunda ley de Newton expresa que la fuerza (vector) es una medida de la razón de cambio de la cantidad de movimiento:* $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$; o la *ecuación de onda que usa derivadas parciales* [$\partial^2\Psi/\partial x^2 = (1/v^2)\partial^2\Psi/\partial t^2$].

Introducción al Calculo

- Dado que muchas de las leyes físicas requieren conocer conceptos básicos del ***calculo***, la idea en esta parte es dar los conceptos sobre algunos de los términos que se usaran en el curso.
- Se aclara que a nivel del curso no se realizaran operaciones de calculo en el sentido literal, pero dada una expresión se debe ser capaz de interpretar el significado de la misma.



La noción de cambio o variación de una cantidad



- Existe un **cambio** cuando se observa que una cantidad física a variado su medida.
- La cantidad que cambia es la diferencia entre lo que hay al final respecto a lo que existía al inicio.
- Esta diferencia se llama **cambio,** y se denota usando la letra griega mayúscula delta (Δ), así si 'X' es una cantidad física, la medida de su cambio es:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$

La noción de diferencial

- En palabras simples un **diferencial** es un cambio extremadamente pequeño, no observable a simple vista y cuya cuantificación tiende a ser nula (*el límite cuando el cambio tiende a cero*).
- La cantidad diferencial se denota con la letra 'd ' acompañando a la letra que indica la variable ('X' en el ejemplo).

Tiempo transcurrido

- El ***tiempo transcurrido*** es una magnitud física con la que medimos la duración o separación de acontecimientos; y permite ordenar los sucesos en secuencias, estableciendo un pasado y un futuro.
- El ***tiempo transcurrido*** (Δt) se mide por intervalos, esto es como **variaciones** o **cambios de tiempo**:

$$\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$$

La noción de la razón de cambio (1)

- Cuanto una cantidad cambia en el tiempo se mide una ***razón de cambio*** o ***rapidez del cambio***.
- Una ***razón de cambio promedio*** es igual a la división del cambio de ‘algo’ (ΔX) entre el tiempo trascurrido en ese cambio (Δt).

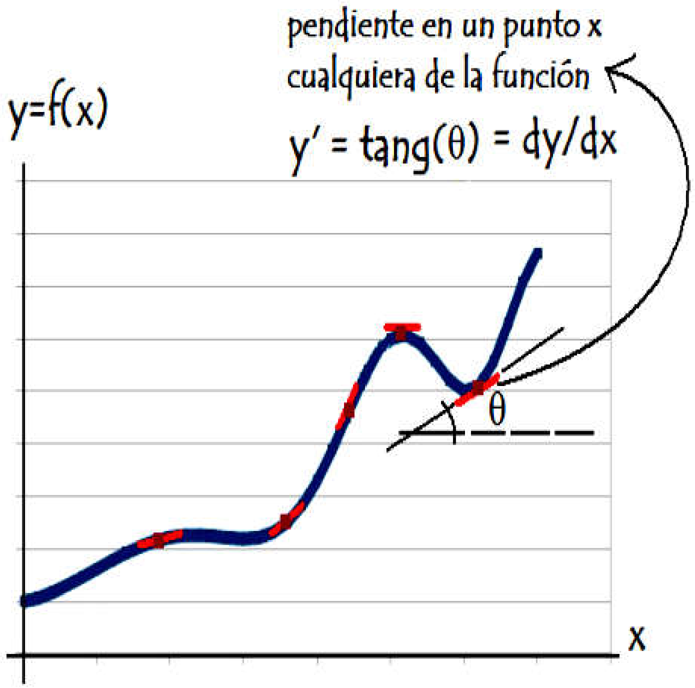
$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{final} - x_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$

La noción de la razón de cambio (2)

- Cuanto se trabaja con cantidades diferenciales se tiene una ***razón de cambio instantánea***.
- La rapidez que marca el velocímetro de un carro es un ejemplo de una razón de cambio instantánea.

$$\text{razón de cambio instantaneo} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La noción de derivada ordinaria



- El cociente entre dos diferenciales se conoce como ***derivada*** y representa una operación del ***calculo*** que permite dada una función continua, no quebrada, y derivable en un tramo [y=f(x)] determinar para cualquier punto dentro del tramo (salvo los extremos) cual es el valor de la pendiente de la recta tangente al punto. <u>La ***derivada*** en general mide la rapidez con la que cambia una función</u>.
- La ***razón de cambio instantáneo*** es un ejemplo de una ***derivada***.

La derivada ordinaria

Nomenclatura en derivadas ordinarias

$$y = f(x) \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}[y'] = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Similar tenemos que:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}\ ; y^{iv} = \frac{d^4y}{dx^4}\ ;\ \text{etc}$$

Propiedades de la derivada

$$\text{sean}: a = const \quad y = f(x) \quad w = g(x)$$

$$z = a \Rightarrow \frac{da}{dx} = 0$$

$$z = a \cdot y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$z = y + w \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

$$z = y \cdot w \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right] \cdot w + y \cdot \left[\frac{dw}{dx}\right]$$

$$z = f(w) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \left[\frac{dy}{dw}\right] \cdot \left[\frac{dw}{dx}\right]$$

Derivadas de algunas funciones

Polinomicas

$$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

Exponenciales

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = \ln[a] \cdot a^x$$

Trigonometricas

$$y = \text{sen}[x] \Rightarrow y' = \cos[x]$$

$$y = \cos[x] \Rightarrow y' = -\text{sen}[x]$$

$$y = \tan[x] \Rightarrow y' = \sec^2[x] = 1 + \tan^2[x] = \frac{1}{\cos^2[x]}$$

Logaritmicas

$$y = \ln[x] \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a[x] \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln[a]}$$

La derivada y el error (1)

- Cuando tenemos una relación entre variables (*una ley física por ejemplo*) el error del resultado depende del error de la cantidad medida y usada en la formula.

$$y = f(x) = 3x^2$$

$$x = 3,50 \pm 0,21$$

$$y = 3 \cdot (3,50)^2 = 36,75 \rightarrow 36,8$$

- Para calcular el error se puede usar una aproximación:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dx}{dy} \rightarrow \Delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta y$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = 6x \cdot \Delta x \rightarrow$$

$$= (6 \cdot 3,50) \cdot 0,21 = 4,41 \rightarrow 4,4$$

$$y = 36,8 \pm 4,4$$

La noción de derivadas parciales

- Cuando se tiene una función que depende de más de una cantidad, al derivar la función respecto a alguna cantidad, para no confundir nomenclaturas simplemente se cambia la letra ‘d’ por la letra ‘∂’.
- Se trabaja igual que las derivadas ordinarias, considerando a las otras variables como constantes.
- Ejemplo:

$$w = \textit{función}\ (x, y) = 3x^3y^2 \rightarrow$$

entonces :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 9x^2y^2 \qquad y \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 6x^3y$$

La derivada y el error (2)

- Cuando tenemos una función multi-variable el error de la función es suma de todos los errores parciales presentes, esto es:

$$y = función\ (x_1, x_2, \ldots)$$

entonces :

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots$$

- Por ejemplo:

$$w = f(x, y) = 3x^2 y$$
$$x = 5,50 \pm 0,05$$
$$y = 2,40 \pm 0,08$$

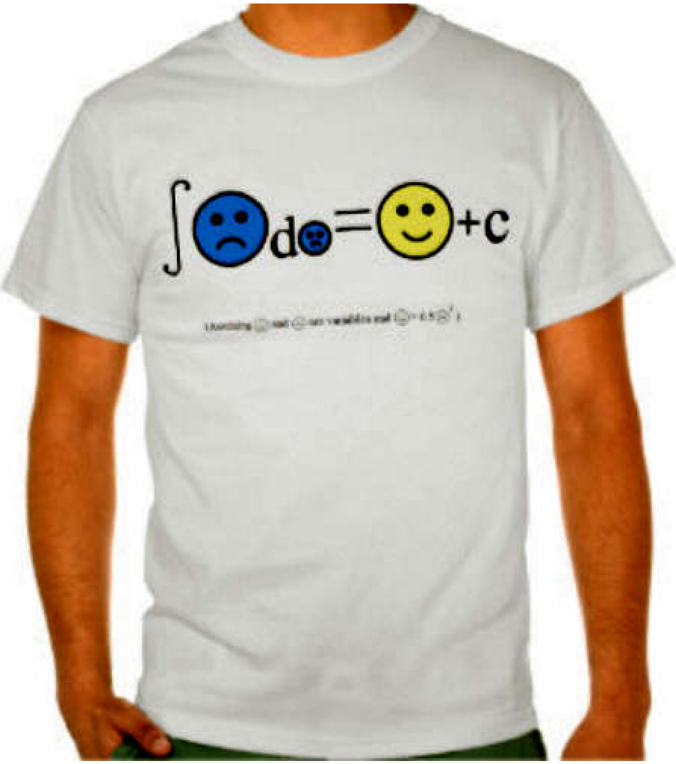
$$w = 3 \cdot (5,50)^2 \cdot 2,40 = 217,8 \rightarrow 218$$

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \Delta y \\ &= 6xy \cdot \Delta x + 3x^2 \cdot \Delta y \rightarrow \\ &= (6 \cdot 5,50 \cdot 2,4) \cdot 0,05 + (3 \cdot 5,50^2) \cdot 0,08 \rightarrow \\ &= 11,22 \rightarrow 11\end{aligned}$$

$$w = 218 \pm 11$$

Noción de la Integración (1)

- Así como la operación suma tiene como opuesto a la resta, la operación multiplicación tiene como opuesta a la división; ***la derivación tiene como operación contraria a la integración***.
- Por lo general deriva quien sabe (*las reglas y las usa apropiada-mente*), integra quien puede (*no todas las integrales son posibles de calcular*).
- ***Nota:*** *El símbolo de la integral es una 'S' alargada que significa suma.*



Noción de la Integración (2)

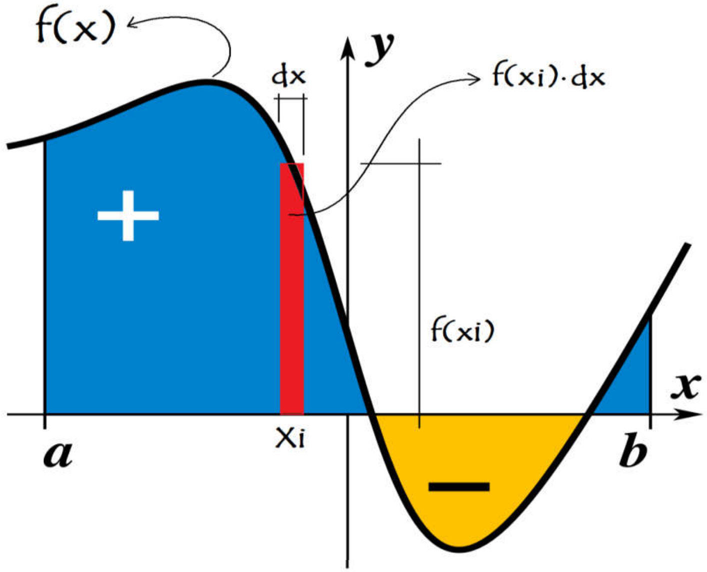
- Pongamos un ejemplo:

$$
\begin{aligned}
sea:\ & y = 2x^3 + 3x + 5 \\
entonces:\ & \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3 \\
luego:\ & \\
& dy = (6x^2 + 3)dx \rightarrow \\
& \int dy = \int (6x^2 + 3)dx \rightarrow \\
& \Delta y = 2x^3 + 3x \rightarrow \\
& y - y_o = 2x^3 + 3x \rightarrow \\
& y = (2x^3 + 3x) + y_o
\end{aligned}
$$

- Podemos observar que el resultado de calcular la integral es obtener la función que derivamos originalmente. Sólo hay una diferencia, la operación de la integral no permite saber cuánto era el valor del y_o (*5 en la función original*), por ello esta operación se llama **integral indefinida** (*no conocemos el* y_o), y la cantidad integrada $2x^3+3x$ define una función nueva (*distinta a la original* y = f(x)) que se denota F(x).

Noción de la Integración (3)

- ***La integral es en esencia una suma de pedazos muy pequeños*** (*diferenciales*), de aquí el origen y significado del signo y de la operación.
- La ***integral definida (o evaluada)*** mide en una grafica y=f(x) el área bajo la curva entre dos puntos [a,b] con signos positivos cuando la función toma valores positivos y negativos en caso contrario (*por ello si lo que se desea medir es toda el área —independiente del signo— hay que tener cuidado con los intervalos*).



$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{xi=a}^{b} f(x)\cdot \Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$$

La integral (propiedades)

Nomenclatura de Integrales

$\int f(x)\cdot dx = F(x) + const$ (integral indefinida)

$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$ (integral definida)

$\iint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot dx_1 \cdot dx_2 \ldots \cdot dx_n$ (integral múltiple)

$\oint f(x)\cdot dx$ (interal cerrada)

Propiedades de la integral

$sean: a = const,\ b = const,\quad y = f(x) \quad w = g(x)$

$\int dx = \Delta x = x_f - x_i$

$\int (a\cdot y + b\cdot w)\cdot dx \Rightarrow a\cdot \int y\cdot dx + b\cdot \int w\cdot dx$

$\int w\cdot dy = w\cdot y - \int y\cdot dw$ *(integración por partes)*

Integrales de algunas funciones

Polinomicas

$$\int x^n\cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cont;\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x^n}\cdot dx = \frac{1-n}{x^{1-n}} + const;\ n \neq 1$$

$$\int x^{-1}\cdot dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + const$$

Exponenciales

$$\int e^x\cdot dx = e^x + const$$

Trigonometricas

$$\int \operatorname{sen}[x]\cdot dx = -\cos[x] + const$$

$$\int \cos[x]\cdot dx = \operatorname{sen}[x] + const$$

$$\int \tan[x]\cdot dx = -\ln[\cos[x]] + const$$

Logaritmicas

$$\int \ln[x] = x\cdot \ln[x] - x \quad (x > 0)$$

La integral impropia

- Lo común es que cuando se calcula la ***integral*** de un ***diferencial*** el resultado sea expresado como el ***cambio*** de algo. Hay situaciones físicas sin embargo donde esto no ocurre. En estos caso se cambia la letra del diferencial ‘đ’ por la letra delta minúscula ‘δ’, el resultado en este caso es una cantidad simplemente. El ***calor*** (Q) y el ***trabajo*** (W) son ejemplos de ***integrales impropias***.

$$W = \int \delta W \neq \Delta W$$

$$Q = \int \delta Q \neq \Delta Q$$

La integral de línea

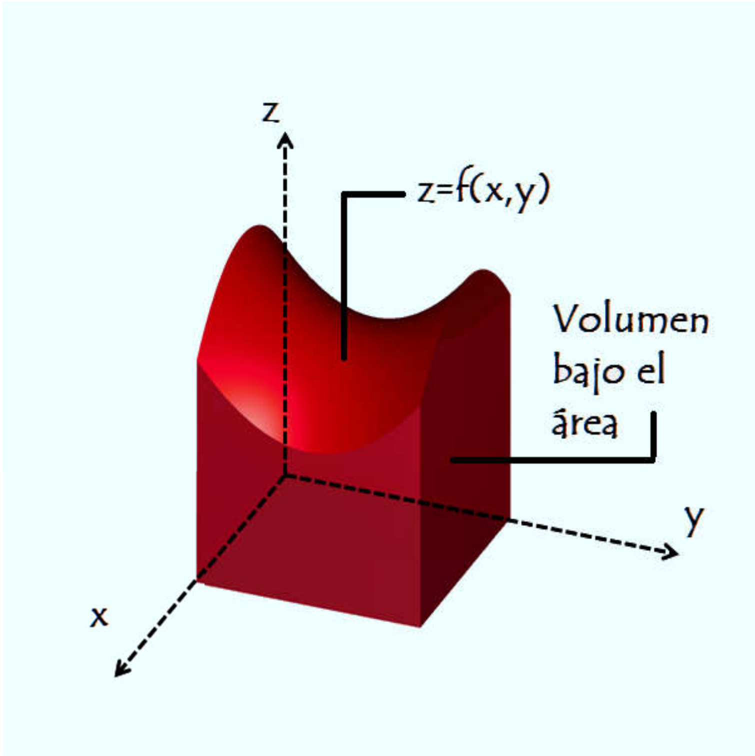
- Cuando se desea calcular no el área bajo una curva (y=f(x)), sino la longitud de la curva, se tiene una **integral de línea**.
- En el caso bidimensional es igual a resolver

$$\int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \rightarrow$$

$$= \int_a^b \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] dx$$

Las integrales dobles

- Si la integral es el área bajo una curva, la integral doble es el volumen bajo un área.
- Para resolverla se integra cada variable por separado, primero una y luego la otra variable.



$$si : y = f(x)$$
$$entonces : \int f(x) \cdot dx = \text{área bajo la curva}$$

$$si : z = f(x,y)$$
$$entonces : \iint f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \text{volumen bajo el área}$$

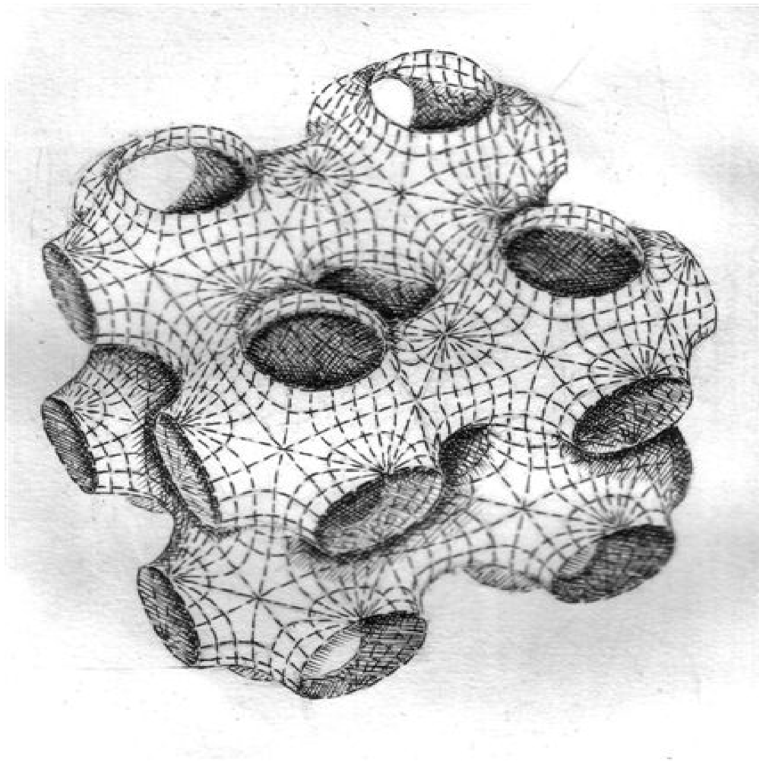
Las integrales de área y volumen

- El calculo de área (*en un plano*) o volumen de un cuerpo (*en el espacio*) es el resultado de calcular integrales dobles y triples respectivamente.

Usando coordenadas rectangulares:

$$Área = \int dA = \iint dx \cdot dy$$

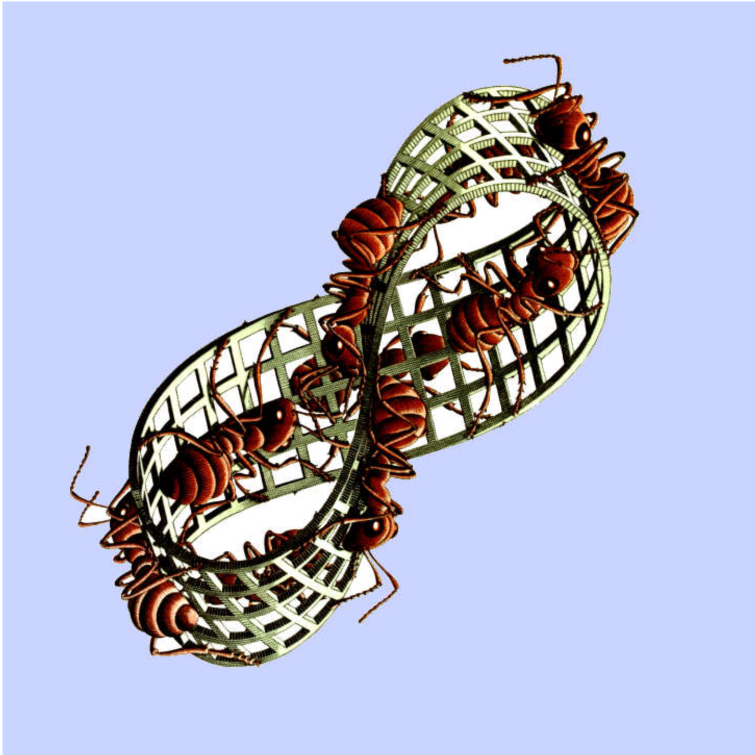
$$vol = \int dvol = \iiint dx \cdot dy \cdot dz$$



La integral de circunvalación

- Cuando se recorre un camino cerrado o el contorno de un área bidimensional, la longitud del camino desde un punto hasta regresar al mismo punto se denota con una **integral cerrada de línea**. Hemos realizado entonces una **circunvalación**.

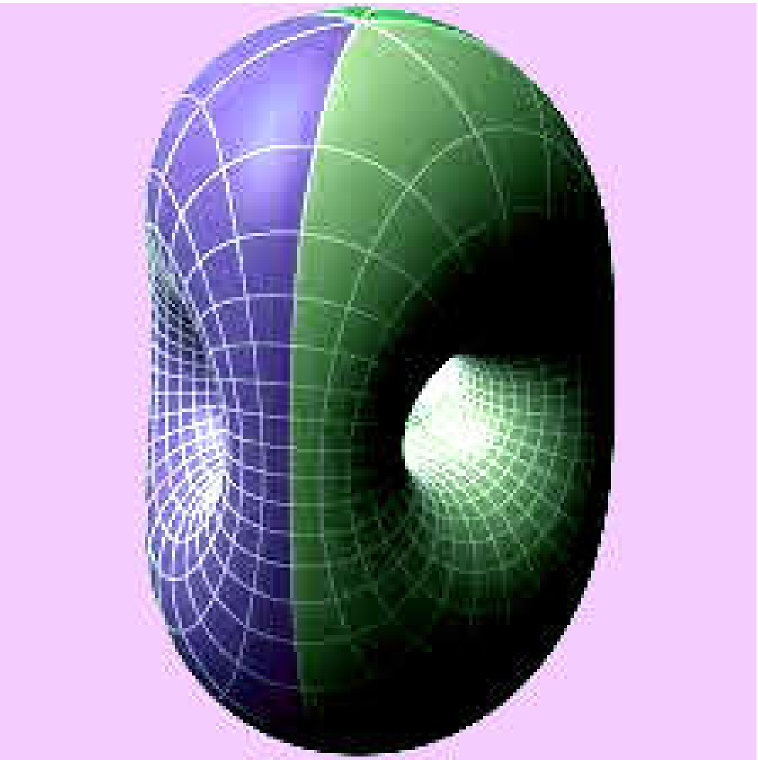
$$\oint dL = \text{Circunvalación}$$



La integral de superficie cerrada

- Cuando se desea calcular la superficie de un volumen, se tiene entonces lo que se conoce como **integral cerrada de superficie**, y en este caso se denota encerrado la integral de área con un circulo.

$$\oint dA = \text{Superficie cerrada}$$



La integración y la física

- Es común que las leyes físicas se expresen como funciones, pero en muchas se hace uso de las ecuaciones diferenciales (*expresiones donde aparecen derivadas*); y otras muchas leyes básicas quedan mejor representadas usando integrales; los flujos, el trabajo, el calor, y las leyes que gobiernan los campos electromagnéticos suelen ser escritas usando integrales.

La distancia como idea (1)

- La distancia (**s**) como concepto matemático es una función tal que debe cumplir con las siguientes condiciones:
  - ***No negatividad***:
    $s(a,b) \geq 0$
  - ***Simetría***:
    $s(a,b) = s(b,a)$
  - ***Desigualdad triangular***:
    $s(a,c) \leq s(a,b) + s(b,c)$

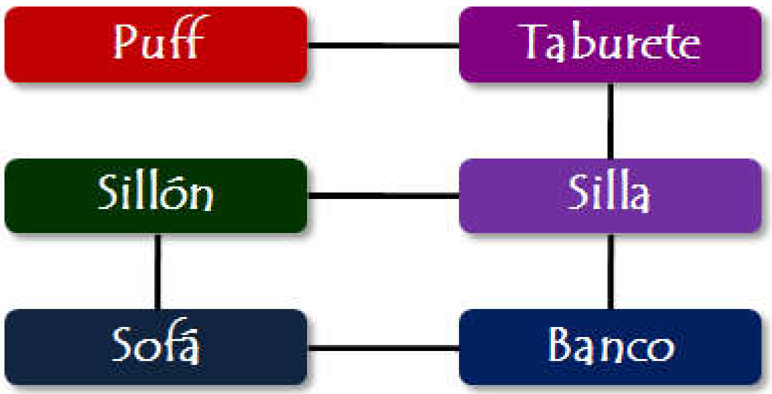
La distancia como idea (2)

- Pongamos un ejemplo de la función distancia: en una familia los padres e hijos los separa una generación; entre hermanos hay una separación; los abuelos y nietos están separados por dos generaciones; entre tíos y sobrinos tenemos también una distancia de dos generaciones; y entre primos hay tres generaciones de separación.

  (*hay que contar el número de ramas que hay para ir de uno a otro*)

La distancia como idea (3)

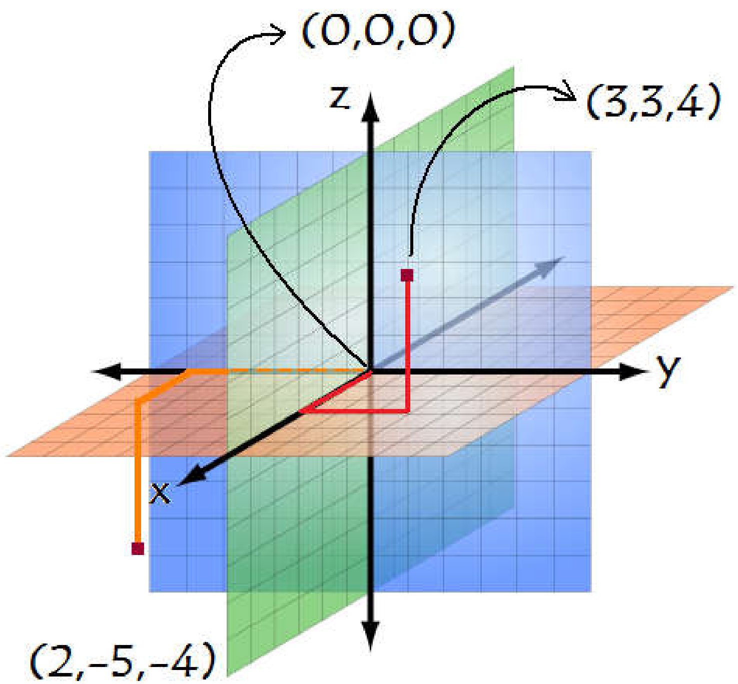
Mueble	Número de lugares	Tiene respaldo	Tiene brazos	Tiene patas
Silla	1	Si	No	Si
Sillón	1	Si	Si	Si
Sofá	+ de 1	Si	Si	Si
Taburete	1	No	No	Si
Puff	1	No	No	No
Banco	+ de 1	Si	No	Si



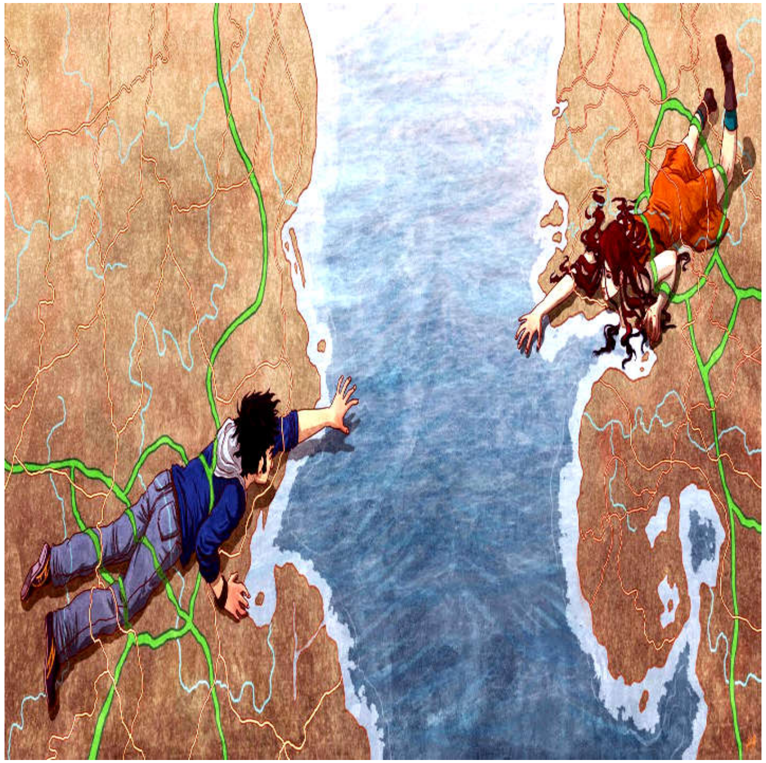
- Pongamos otro ejemplo, según las diferencias entre los muebles.
- La silla tiene igual separación del sillón, el taburete y el banco (con respaldo ya que hay algunos sin respaldo); y la silla se encuentra separada con dos diferencias del puff y del sofá.
- El banco esta más cerca de la silla y el sofá que del sillón y el taburete; teniendo con el puff la mayor distancia (tres diferencias).
- Los más distantes son el puff y el sofá con cuatro diferencias.

Coordenada de un punto

- El espacio posee tres dimensiones perpendiculares entre si: ancho, largo y alto, y cada punto en el espacio puede ser indicando por una agrupación de tres números **(x,y,z)**, siendo cada número la cantidad perpendicular que se mide respecto a un punto fijo o origen de coordenadas (0,0,0).



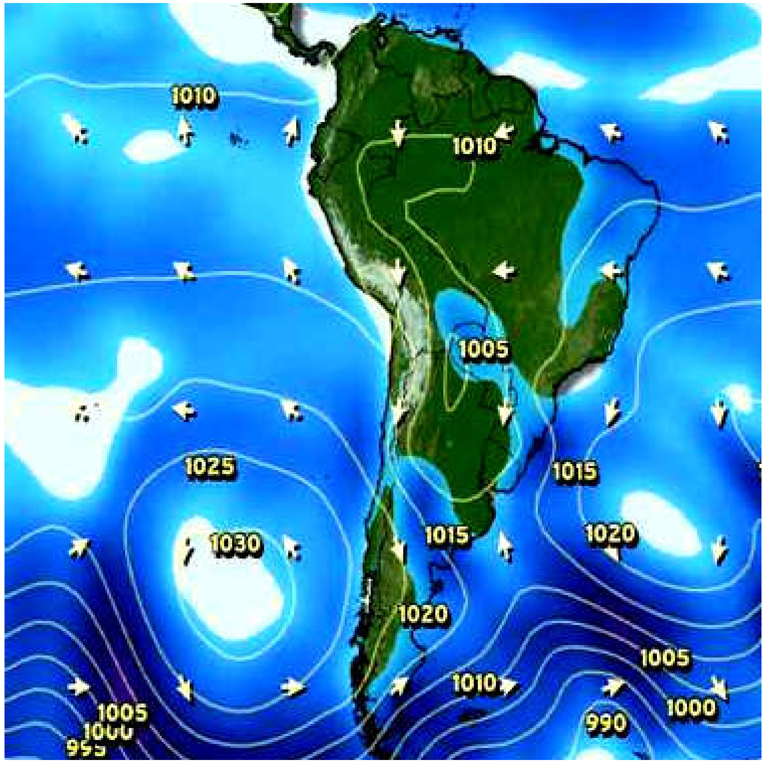
Distancia entre dos puntos



- La distancia geométrica (***s***), que también denotamos Δ***s*** *(<u>aunque no sea un cambio)</u>*, entre dos puntos en el espacio euclidiano esta dada por la expresión:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Noción de Campo (1)



- En física, un ***campo*** representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio.
- Matemáticamente, los campos se representan mediante la función que los define. Gráficamente, se suelen representar mediante líneas o superficies de igual magnitud.

Noción de Campo (2)

- Un ***campo escalar*** es una función donde a cada punto del espacio [coordenadas (x,y,z)] se le asigna una cantidad escalar o número (f)
- Entre los campos escalares más comunes se incluyen a la temperatura y la presión.

$$\text{campo escalar} = F(x, y, z) = f$$

Noción de Campo (3)

- Un ***campo vectorial*** es una función donde a cada punto del espacio podemos asignar una cantidad vectorial. Ejemplos de estos campos son el campo gravitatorio, los campos electromagnéticos y las velocidades en flujos de partículas, como el viento en la atmósfera.

$$campovectorial = \vec{F}(x,y,z) = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$

$$donde:$$

$$f_x = f_x(x,y,z)$$

$$f_y = f_y(x,y,z)$$

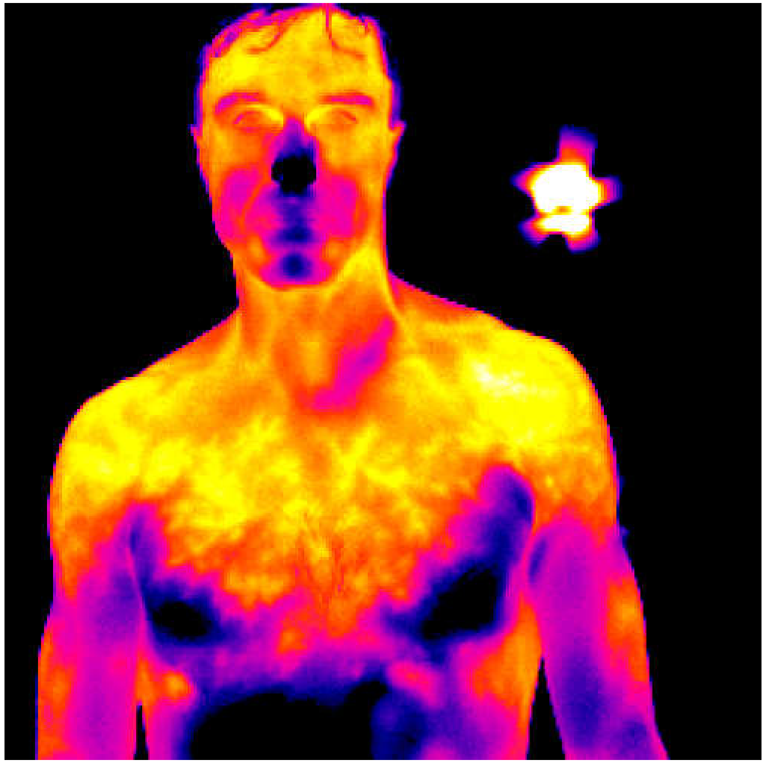
$$f_z = f_z(x,y,z)$$

Noción de flujo

- Se suele hablar que existe un **flujo** (ϕ) de algo (materia, carga, energía,…) cuando entre dos puntos del espacio existen diferentes concentraciones de ese algo, y lo normal es que donde haya más se mueva a donde hay menos. El movimiento de ese algo por el espacio implica una cantidad vectorial.
- La **medida del flujo** es la integral de esa cantidad vectorial multiplicada escalarmente por el área (*vector*) transversal entre esos dos puntos.

$$flujo = \phi = \int \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{A}$$

La noción de gradiente (1)



- El ***gradiente*** es una razón de cambio de un ***campo escalar*** no respecto al tiempo, sino respecto a la distancia entre dos puntos.
- A diferencia de la razón de cambio temporal (*que solo va desde el pasado al futuro*), entre dos puntos del espacio hay que indicar la dirección (*no es igual el cambio de A a B que de B a A*), para indicar la dirección y sentido se usa el vector unitario que va entre el punto inicial y el final.

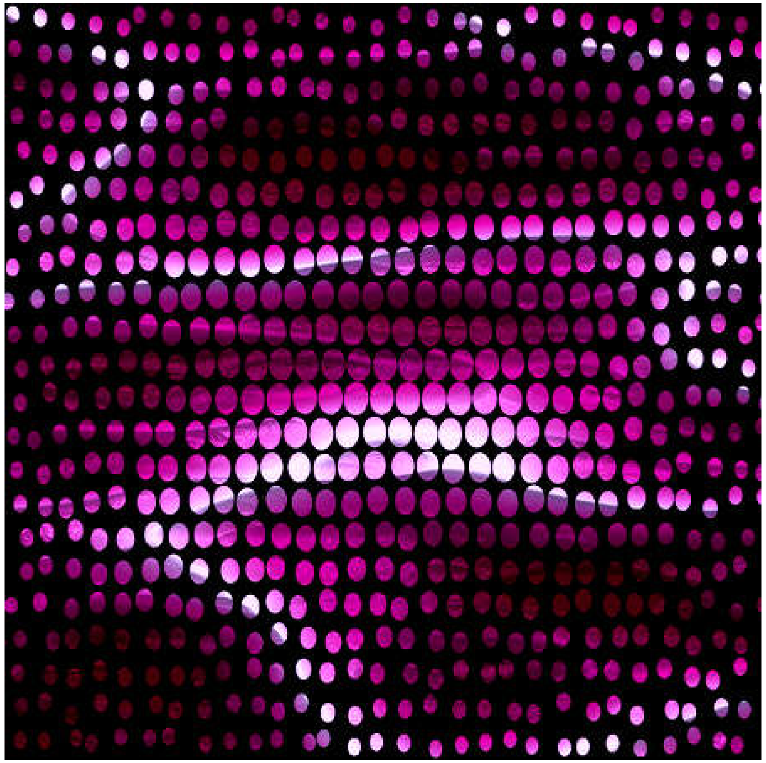
$$\text{Gradiente} = \frac{\Delta f}{\Delta s} \cdot \vec{u}$$

El Operador Nabla

- Sobre los campos (*escalares y/o vectoriales*) se requieren muchas veces medir el cambio de la cantidad entre puntos del espacio.
- Por razones de notación se suele hacer uso del ***Operador Nabla*** (∇), palabra griega que significa '*arpa*' por la forma del triangulo invertido, también es llamado ***Anadelta*** (la letra delta invertida)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\hat{k}$$

La noción de gradiente (2)



- En el caso de usar cantidades diferenciales el resultado es una expresión que contiene derivadas parciales. Para ello es más corta la notación usando el ***Operador Nabla***.
- El resultado del ***gradiente*** sobre un ***campo escalar*** es un ***campo vectorial*** que indica o muestra la dirección en la que algo fluye.

$$si \quad f = f(x,y,z) \quad entonces:$$

$$Gradiente = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \hat{k}$$

Noción de Divergente

- Se define como ***divergente*** al producto escalar entre el Operador Nabla y una función que define un campo vectorial.
- El resultado es un campo escalar que mide en cada punto del espacio si el flujo que pasa por el mismo se incrementa (fuente) o disminuye (sumidero)

$$si \quad \vec{F} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k} \quad entonces:$$

$$Divergente = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Noción de Rotacional

- Se define como ***rotacional*** al producto vectorial entre el Operador Nabla y una función que define un campo vectorial.
- El resultado mide la circulación (rotación) de un flujo alrededor de un punto del espacio y permite medir los vórtices que se generan dentro de un fluido cuando un cuerpo solido los atraviesa por ejemplo.

$$si \quad \vec{F} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k} \quad entonces:$$

$$Rotacional = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

Noción de Laplaciano

- En forma sencilla el ***Laplaciano*** es el divergente de un gradiente.
- El Laplaciano aparece en ecuaciones diferenciales que se describen muchos fenómenos físicos tales como: la difusión del calor y el flujo de una concentración, la propagación de las ondas, y en mecánica cuántica.

$$si \quad f = f(x,y,z) \quad entonces:$$

$$Laplaciano = \Box f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$